

Vetschera, Rudolf

**Working Paper**

## Visualisierungstechniken in Entscheidungsproblemen bei mehrfacher Zielsetzung

Diskussionsbeiträge - Serie I, No. 267

**Provided in Cooperation with:**

Department of Economics, University of Konstanz

*Suggested Citation:* Vetschera, Rudolf (1993) : Visualisierungstechniken in Entscheidungsproblemen bei mehrfacher Zielsetzung, Diskussionsbeiträge - Serie I, No. 267, Universität Konstanz, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/68910>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

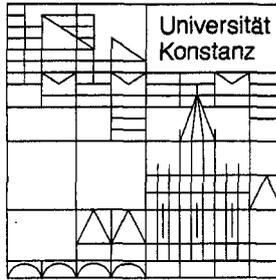
Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*



**Fakultät für  
Wirtschaftswissenschaften  
und Statistik**

---

Rudolf Vetschera

**Visualisierungstechniken in  
Entscheidungsproblemen bei  
mehrfacher Zielsetzung**

495006

13. OKT. 1993 **Weltwirtschaft  
Kiel**

*W 284 (267) di*

**Diskussionsbeiträge**

---

Postfach 5560  
D-78434 Konstanz

Serie I — Nr. 267  
September 1993

**Visualisierungstechniken in Entscheidungsproblemen  
bei mehrfacher Zielsetzung**

**Rudolf Vetschera**

**Serie I - Nr. 267**

**September 1993**

**W 284 (267)**



## Visualisierungstechniken in Entscheidungsproblemen bei mehrfacher Zielsetzung\*

Rudolf Vetschera, Universität Konstanz

### **Zusammenfassung**

In diesem Beitrag werden unterschiedliche Ansätze zur graphischen Darstellung von Datenwerten, Präferenzrelationen und kardinalen Bewertungen in entscheidungsunterstützenden Systemen für Probleme bei mehrfacher Zielsetzung vorgestellt. Neben der Darstellung der einzelnen Ansätze wird auch auf den damit verbundenen Rechenaufwand sowie mögliche Interpretationsprobleme eingegangen.

### **Abstract**

The paper surveys techniques for visualization in the context of multi-criteria decision problems. Techniques for representing data values of alternatives, preference relations and cardinal evaluations are covered. Several techniques are presented for each area, taking also into account problems of implementation in interactive systems and cognitive effects that might result from the use of different graphical representations.

---

\* Überarbeitete Fassung eines Vortrages beim 3. Workshop der DGOR-Arbeitsgruppe "Entscheidungstheorie und -praxis", Schwangau/Allgäu, 16.-19.3.1993

## **1. Problemstellung**

Die Forschung auf dem Gebiet der Entscheidung bei mehrfacher Zielsetzung befaßt sich in zunehmendem Ausmaß mit der Entwicklung entscheidungsunterstützender Softwaresysteme für diese Problemklasse (Korhonen, 1992; Korhonen et al., 1992; Zionts, 1992). Mit der verstärkten Softwareorientierung gewinnt auch die Frage nach der Gestaltung der Benutzerschnittstelle dieser Systeme und damit nach geeigneten Darstellungsformen für Mehrzielprobleme an Bedeutung. Ziel dieses Beitrages ist es, einen Überblick über Ansätze zur Visualisierung in Mehrzielproblemen zu geben, die zum Teil bereits in Entscheidungsunterstützungssystemen eingesetzt werden oder aber für den Einsatz in derartigen Systemen potentiell geeignet erscheinen.

Im Vordergrund stehen dabei Ansätze, die auf diskreten Handlungsalternativen aufbauen und Eigenschaften dieser Alternativen, wie etwa Datenwerte oder Präferenzbeziehungen, graphisch darstellen. Folgt man der in der Literatur zur Entscheidung bei mehrfacher Zielsetzung allgemein üblichen Klassifikation in "Multi-Attribute"-Probleme (MADM), bei denen diskrete Handlungsalternativen betrachtet werden, und "Multi-Objective"-Probleme (MODM) der mathematischen Programmierung bei mehrfacher Zielsetzung, bei denen Handlungsalternativen implizit durch Nebenbedingungen eines Modells beschrieben werden, so ist damit primär der erste der beiden Bereiche abgedeckt. Die Darstellung einzelner Handlungsalternativen ist jedoch auch für MODM-Problem von zentraler Bedeutung. Die meisten in der Literatur entwickelten Verfahren für MODM-Probleme erfordern vom Benutzer die Bewertung oder Spezifikation einzelner Lösungen oder den Vergleich zwischen mehreren Lösungsvorschlägen. Auch für diese Problemstellungen können die hier betrachteten Ansätze benutzt werden.

In dieser Arbeit nicht behandelt werden Konzepte, die von konkreten Handlungsalternativen völlig abstrahieren und die sich etwa mit der graphischen Darstellung eines hierarchisch strukturierten Zielsystems befassen. Diese Darstellungen sind zwar für die Entscheidungsunterstützung in Mehrzielproblemen ebenfalls relevant und werden in einigen verbreiteten Programmsystemen wie z.B. (Expert Choice Inc., 1990; Hämäläinen/Lauri, 1992) benutzt. Methodisch unterscheiden sich die dafür entwickelten Darstellungsformen jedoch erheblich von den hier vorgestellten Konzepten, so daß sie, auch aus Raumgründen, in diesem Beitrag nicht berücksichtigt werden.

Die hier betrachteten Visualisierungstechniken können nach unterschiedlichen Kriterien klassifiziert werden. In diesem Beitrag wird ein Klassifikationsschema benutzt, das sich primär an den darzustellenden Objekten orientiert. Dabei wird zwischen der Darstellung von

- Werten von Entscheidungsvariablen
- Werten von Zielgrößen
- ordinalen Präferenzaussagen und
- kardinalen Präferenzaussagen

unterschieden. Als weiteres Kriterium dient bei der Visualisierung von Zielgrößenwerten, für die viele Verfahren zur Verfügung stehen, die Anzahl der darzustellenden Alternativen.

Der weitere Aufbau der Arbeit folgt dem soeben skizzierten Klassifikationsschema. Im zweiten Abschnitt werden Verfahren für die Visualisierung der Werte von Entscheidungsvariablen und von Zielgrößen vorgestellt. Der dritte Abschnitt behandelt die Darstellung ordinaler Präferenzaussagen, der vierte Abschnitt geht auf kardinale Präferenzaussagen ein. Im fünften Abschnitt wird der bisherige Stand der Entwicklung zusammengefaßt und Bereiche für zukünftige Arbeiten werden aufgezeigt.

## **2. Visualisierung von Datenwerten**

### **2.1. Entscheidungsvariablen**

In Problemen der mathematischen Programmierung unter mehrfacher Zielsetzung werden Alternativen implizit durch die Werte von Entscheidungsvariablen beschrieben. Auch in Problemen, bei denen diskrete Handlungsalternativen vorliegen, können diese aus der Festlegung mehrerer Systemparameter resultieren. Als erste Darstellungsebene sollen daher hier die Werte von Entscheidungsvariablen betrachtet werden.

Die explizite Betrachtung der Werte von Entscheidungsvariablen mag zunächst als Widerspruch zur klassischen Forderung der Entscheidungstheorie scheinen, Handlungsalternativen lediglich anhand der mit ihnen verbundenen Zielerreichungsgrade zu beurteilen (Laux, 1991, S. 23; Bamberg/Coenenberg, 1992, S. 23). Möglicherweise ist ein Entscheidungsträger aber nicht in der Lage oder bereit, sämtliche von ihm verfolgten Ziele offenzulegen (Schilling et al., 1982). In diesem Fall kann auch die Darstellung der mit einer Alternative verbundenen Werte der Entscheidungsvariablen für den Anwender von Interesse sein.

Bei Problemen mit diskreten Alternativen ist für den Entscheider häufig die Information relevant, durch welche Entscheidungsvariablen die Unterschiede zwischen den betrachteten Alternativen verursacht werden und welche Variablen zwischen den Alternativen unverändert bleiben. Eine ähnliche Situation ist gegeben, wenn Alternativen nicht aus einzelnen Aktionen bestehen, sondern sich aus mehreren Teilaktionen zusammensetzen. Für den Entscheidungsträger kann dann die Frage interessant sein, welche der insgesamt möglichen Teilaktionen in einer derartigen zusammengesetzten Alternative, d.h. einem Gesamtplan, enthalten sind.

Eine für die Übermittlung dieser Information besonders geeignete graphische Darstellungsform wurde von Schilling et al. (1982) zunächst für ein Problem entwickelt, in dem Gesamtpläne durch unterschiedliche Kombinationen von Teilaktionen gebildet wurden. Nach Ansicht der Autoren des Verfahrens kann es auch auf den Fall allgemeinerer Entscheidungsvariablen übertragen werden.

Der Algorithmus von Schilling et al. zur graphischen Darstellung kann wie folgt formuliert werden (Schilling et al., 1982, S. 238):

1. Identifiziere "stabile Lösungskomponenten". Im Falle von Alternativen, die aus mehreren Teilaktionen zusammengesetzt sind, handelt es sich bei den "stabilen Lösungskomponenten" um Teilaktionen, die in mehreren Alternativen auftreten. Im Falle allgemeiner Entscheidungsvariablen sind dies Variablen, deren Werte zwischen mehreren Alternativen unverändert bleiben.
2. Verbinde die "stabilen Lösungskomponenten" im Diagramm durch horizontale Linien
3. Verbinde die verbleibenden ("nicht stabilen") Lösungskomponenten im Diagramm durch nicht horizontale Linien.

Abbildung 1 zeigt die Anwendung dieses Algorithmus auf ein fiktives Beispiel aus der Investitionsplanung (Vetschera, 1991). Auf der horizontalen Achse sind Investitionsprogramme dargestellt, die jeweils aus unterschiedlichen Investitionsprojekten bestehen. Die Projekte selbst sind entlang der vertikalen Achse aufgetragen. So besteht z.B. Investitionsprogramm 3 aus den Projekten 2, 6 und 7. Durch die Verbindung der Investitionsprojekte über die Programme hinweg wird sehr deutlich die Information vermittelt, daß sich z.B. Investitionsprogramme 3 und 4 nur dadurch voneinander unterscheiden, daß in Programm 4 das Projekt 2 durch das Projekt 1 ersetzt wird.

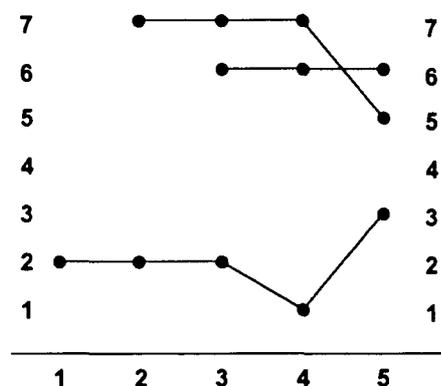


Abbildung 1: Graphische Darstellung der Zusammensetzung von Alternativen nach Schilling et al., (1982)

Der von Schilling et al. angegebene Algorithmus läßt allerdings einige für die praktische Anwendung bedeutende Fragen offen. Insbesondere wird das Problem der Anordnung der (zusammengesetzten) Alternativen entlang der horizontalen Achse nicht berücksichtigt. Würde man etwa im Beispiel der Abbildung 1 die Alternativen 3 und 5 vertauschen, ergäbe sich ein weitaus weniger deutliches Bild. Zwar könnte ein Optimalitätskriterium für die Anordnung der Alternativen einfach formuliert werden, indem die Gesamtlänge horizontaler Streckenzüge in der Graphik maximiert wird. Die Ermittlung der bezüglich dieses Kriteriums optimalen Anordnung der Alternativen würde jedoch erheblichen Rechenaufwand erfordern und erscheint daher für den Einsatz in interaktiven Systemen kaum praktikabel.

Ein weiteres Problem, auf das von Schilling et al. ebenfalls nicht eingegangen wird, stellen Alternativen dar, die sich aus einer unterschiedlichen Zahl von Teilaktionen zusammensetzen. In der Originalarbeit wird lediglich ein Beispiel demonstriert, in dem sämtliche betrachteten Alternativen die gleiche Zahl von Teilaktionen enthalten. Im obigen Beispiel wurde das Problem pragmatisch dadurch umgangen, daß die Alternativen in aufsteigender Zahl ihrer Teilaktionen angeordnet wurden. Dies kann jedoch im allgemeinen Fall zu einem Widerspruch zur optimalen Anordnung im Sinne der maximalen Länge horizontaler Streckenzüge führen.

## 2.2. Zielgrößenwerte

Zur Darstellung der Zielgrößenwerte von Alternativen existiert eine große Zahl von Repräsentationsformen. Zur Klassifikation dieser Formen wird daher als weiteres Kriterium die Anzahl der darzustellenden Alternativen herangezogen. Nach diesem Kriterium können drei Fälle unterschieden werden, in denen jeweils unterschiedliche Anforderungen an die gewählte Darstellungsform zu stellen sind:

- Es sollen nur *einzelne* bzw. *wenige* Alternativen dargestellt werden:

In diesem Fall soll die Darstellungsform detaillierte Informationen über die Zielerreichung der betrachteten Alternative(n) in sämtlichen Zielen vermitteln.

- Es sollen *mehrere* Alternativen dargestellt werden:

In diesem Fall soll die Darstellung einen holistischen Gesamteindruck der Zielerreichungen der Alternativen in allen Attributen vermitteln, spezifische Datenwerte müssen daraus aber nicht mehr erkennbar sein.

- Es sollen *viele* Alternativen dargestellt werden:

In diesem Fall müssen die Werte über die Attribute verdichtet werden.

Die Abgrenzung zwischen "wenigen", "mehreren" und "vielen" Alternativen richtet sich nach der kognitiven Belastbarkeit des Anwenders. Geht man von der häufig vertretenen Hypothese aus (Miller,

1956), daß das menschliche Kurzzeitgedächtnis gleichzeitig etwa sieben Objekte speichern kann, so legt diese Größe den zweiten Bereich der holistisch darstellbaren Alternativen (also "mehrerer" Alternativen) fest. Im ersten Fall stellt jeder einzelne Zielwert der dargestellten Alternativen ein zu erfassendes Objekt dar, so daß hier das Produkt aus der Zahl der Alternativen und der Zahl der Attribute dieser Grenze unterliegt.

In den folgenden Unterabschnitten werden Darstellungsformen für die drei soeben abgegrenzten Situationen in der angegebenen Reihenfolge betrachtet.

### **2.2.1. Einzelne Alternativen**

Zur Darstellung der Zielerreichungsgrade einzelner Alternativen benutzen viele Systeme zur Entscheidungsunterstützung bei mehrfacher Zielsetzung die aus der Geschäftsgraphik bekannten Darstellungsformen, insbesondere Balkendiagramme. Die Eignung der üblichen Graphikformen wie Balken-, Linien- oder Kreisdiagramme für unterschiedliche Aufgaben wie Mustererkennung, das Ablesen spezifischer Werte oder Vergleiche zwischen Objekten stellt mittlerweile ein sehr intensiv bearbeitetes Forschungsgebiet dar, über das sowohl praktische Erfahrungswerte (z.B. Zelasny, 1989) als auch Ergebnisse empirischer Untersuchungen vorliegen. Aus Raumgründen soll daher hier nur auf einschlägige Übersichtsarbeiten (z.B. DeSanctis, 1984; Benbasat et al., 1986; Dickson et al., 1986; Jarvenpää/Dickson, 1988) verwiesen werden. Diese Arbeiten zeigen deutlich, daß für die in Zusammenhang mit der Lösung von Mehrzielproblemen besonders relevanten Teilaufgaben der Mustererkennung und des Vergleiches zwischen mehreren Datenreihen vor allem Balken- und Liniendiagramme gut geeignete Darstellungsformen sein dürften, während etwa Kreisdiagramme für diese Aufgaben weniger geeignet sind. Aus der bisherigen empirischen Literatur ergibt sich allerdings ebenfalls sehr deutlich, daß graphische Information alleine keine ausreichende Basis für die Entscheidungsunterstützung darstellt und auch der Darstellung konkreter numerischer Werte in Tabellenform große Bedeutung zukommt.

Eine interessante Erweiterung klassischer Darstellungsformen der Geschäftsgraphik stellt das Konzept der "Parallelen Achsen"-Diagramme (Inselberg, 1985) dar. Anwendungen dieses Konzeptes wurden bereits in dem der Entscheidung bei mehrfacher Zielsetzung sehr nahe verwandten Gebiet der Data Envelopment Analysis vorgeschlagen (Desai/Walters, 1991). Diese Darstellungsform soll zunächst anhand eines einfachen Problems mit zwei Zielgrößen illustriert werden (Abbildung 2). Die Dimensionen eines Problems werden durch (zwei) vertikale, parallele Achsen in der zweidimensionalen Darstellung repräsentiert. Jeder Alternative wird durch die Verbindungsgerade zwischen den Abschnitten auf den beiden Achsen dargestellt, die ihren Datenwerten in den beiden Zielgrößen entsprechen. Im Gegensatz dazu würde die Alternative in einem traditionellen Punktdiagramm durch einen Punkt im zweidimensionalen Datenraum dargestellt, dessen Koordinaten ihren Datenwerten entsprechen.

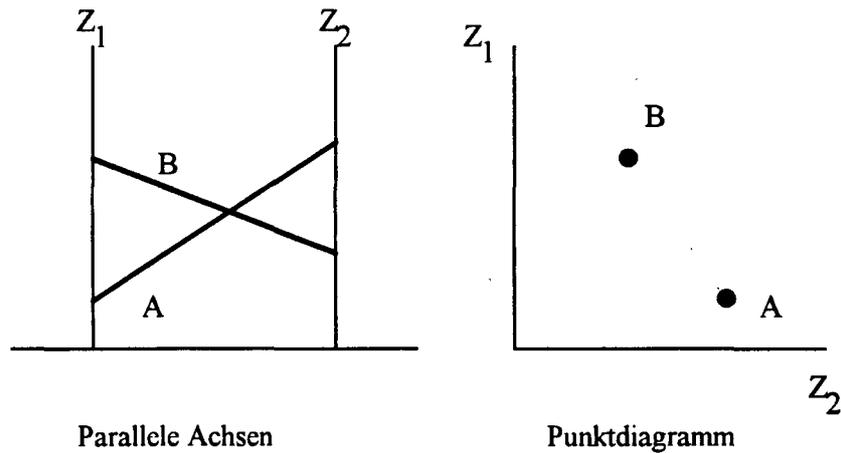


Abbildung 2: Darstellung von zwei Alternativen A und B im Diagramm mit parallelen Achsen und im konventionellen Punktdiagramm

Wie Abbildung 2 ebenfalls zeigt, besteht zwischen den beiden Darstellungsformen eine Dualitätsbeziehung: im konventionellen Punktdiagramm werden Alternativen durch Punkte, und Beziehungen zwischen Alternativen durch Linien dargestellt, im Diagramm mit parallelen Achsen genau umgekehrt.

Die Bedeutung dieses Konzeptes für die Visualisierung von Entscheidungsproblemen bei mehrfacher Zielsetzung ergibt sich aus seiner Beziehung zum Effizienzbegriff: Wie man leicht erkennt, liegt in der zweidimensionalen graphischen Darstellung eines Entscheidungsproblems mit zwei Zielgrößen als Punktdiagramm Dominanz zwischen zwei Alternativen dann vor, wenn die Verbindungsgerade zwischen den Datenpunkten der beiden Alternativen einen nichtnegativen Anstieg aufweist. Der Anstieg dieser Verbindungsgeraden soll mit  $m$  bezeichnet werden. Zwischen dem Anstieg  $m$  und der Lage des Schnittpunktes der Geraden, die die beiden Alternativen im Diagramm mit parallelen Achsen repräsentieren, besteht ein eindeutiger Zusammenhang, den Abbildung 3 zeigt: liegt der Schnittpunkt der beiden Geraden zwischen den parallelen Achsen, so ist der Anstieg negativ und es besteht keine Dominanzbeziehung zwischen den Alternativen, liegt er außerhalb, so besteht Dominanz. Es reicht daher, in einer graphischen Darstellung mit parallelen Achsen die Schnittpunkte der die Alternativen repräsentierenden Geraden darzustellen, um einen visuellen Eindruck der vorhandenen Dominanzbeziehungen zu vermitteln.

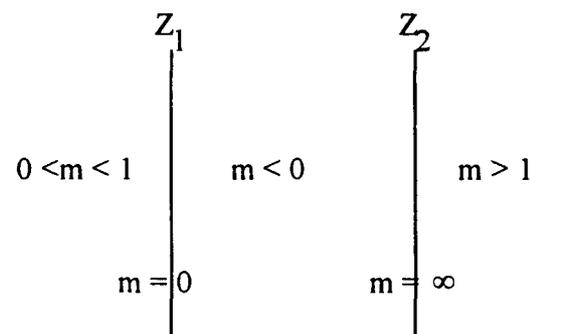


Abbildung 3: Dominanzbeziehungen im Parallel-Achsen-Diagramm (Desai/Walters, 1991, S. 342)

### 2.2.2. Mehrere Alternativen

Insbesondere für den Vergleich mehrerer Alternativen ist die Vermittlung präziser Datenwerte im Vergleich mit der Vermittlung eines holistischen Gesamteindrucks über die Alternativen von geringerer Bedeutung.

Eine relativ weit verbreitete holistische Darstellungsform stellen Sterndiagramme dar. Dabei werden die Werte einzelner Attribute entlang von Achsen abgetragen, die symmetrisch von einem gemeinsamen Mittelpunkt ausgehen (vgl. Abb. 4). Einsatzgebiete dieser Darstellungsform liegen vor allem im Bereich der Zuordnung von Alternativen zu Klassen (Sobol/Klein, 1989) und im Vergleich zwischen mehreren Datenvektoren, die jeweils durch sternförmige Polygonzüge dargestellt werden. Aus der relativen Position der Polygonzüge kann die Vorteilhaftigkeit der dargestellten Alternativen in einzelnen Attributen leicht abgelesen werden. Dies gilt auch für den Vergleich von Alternativen mit idealen oder minimalen Zielniveaus (Kasanen et al., 1991), so daß diese Darstellungsform für den Einsatz in anspruchsniveauorientierten Entscheidungsverfahren besonders geeignet erscheint. Für diesen Zweck wurden auch heuristische Verfahren entwickelt, die es erlauben, zu vorgegebenen Anspruchsniveaus im Sinne der Darstellung im Sterndiagramm möglichst "ähnliche" zulässige und effiziente Lösungen zu ermitteln (Kasanen et al., 1991).

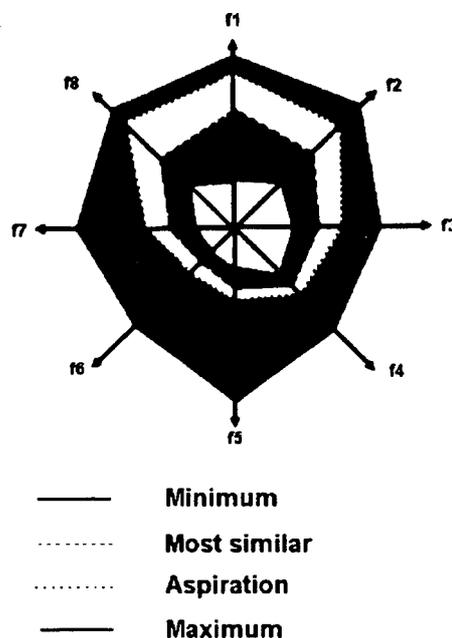


Abbildung 4: Sterndiagramm (Kasanen et al., 1991, S. 236)

Das Grundmuster der Sterndiagramme wurde in zahlreichen Varianten erweitert, die sich insbesondere durch die Skalierung der einzelnen Achsen voneinander unterscheiden (Chambers et al., 1983; Heiler et al., 1992). In einer weiteren, ebenfalls sehr ähnlichen Darstellungsform werden die Kreissegmente zwischen den einzelnen Achsen anstelle der Achsenabschnitte benutzt (Angehrn, 1991).

Das Sterndiagramm ist eine abstrakte Darstellungsform. Andere Ansätze versuchen, einen besseren holistischen Gesamteindruck durch die Verwendung konkreter Objekte zu erzielen. Das wohl bekannteste Konzept dieser Klasse ist die Gesichtsdarstellung von Chernoff (1973), für die Abbildung 5 ein Beispiel zeigt. Den einzelnen Elementen des Datenvektors werden Eigenschaften des Gesichtes wie die Krümmung des Mundes, die Länge der Nase oder der Abstand zwischen den Augen, zugeordnet. Insgesamt ist es nach dem ursprünglichen Konzept von Chernoff möglich, bis zu 18 Dimensionen darzustellen. Erweiterungen, die auch unsymmetrische und realistischere Gesichter umfassen (Flury/Riedwyl, 1981), ermöglichen die Darstellung einer noch größeren Zahl von Dimensionen.

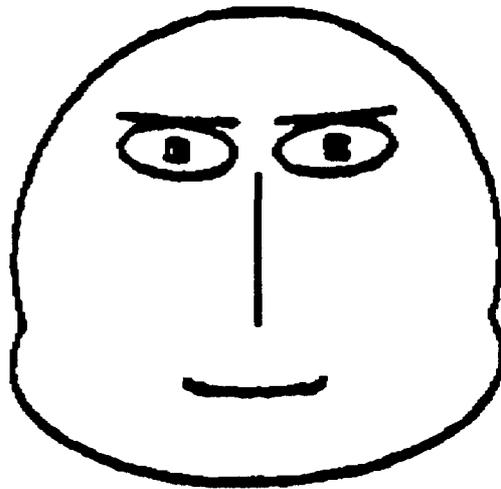


Abbildung 5: Chernoff-Face (Chernoff, 1973, S.364)

Ein ähnliches Konzept wurde von Korhonen (1991) spezifisch für den Einsatz in Entscheidungsproblemen bei mehrfacher Zielsetzung entwickelt. Die Darstellung beruht auf einem einfach gezeichneten Haus (Abbildung 6):

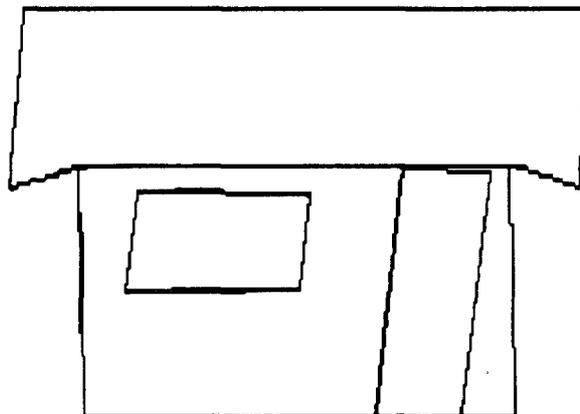


Abbildung 6: "Harmonischer Haus" von Korhonen (1991, S. 52)

Die Koordinaten jedes Eckpunktes jedes Teilobjektes der Darstellung (z.B. des Fensters) werden durch zwei Attributwerte bestimmt, so daß bei konstanter Grundlinie in den 12 Datenpunkten der Darstellungsform von Abbildung 6 insgesamt 24 Attribute dargestellt werden können. Im Gegensatz zu Chernoff-Faces ist die Hausdarstellung von Korhonen jedoch erweiterbar, indem z.B. ein weiteres Stockwerk mit Fenstern eingezeichnet wird. Dadurch kann auch eine noch größere Zahl von Attributen repräsentiert werden.

Allerdings ist die Darstellung eines Hauses möglicherweise weniger gut geeignet, einen holistischen Gesamteindruck zu vermitteln als die eines Gesichtes, da die menschliche Informationsverarbeitung auf die Interpretation von Gesichtern besonders gut trainiert ist (Jacob, 1978). Andererseits aber stellt gerade der emotionale Gehalt der Darstellung eines Gesichtes ein mögliches Problem dar (Bruckner, 1978): bestimmte Eigenschaften eines Gesichtes, z.B. die Krümmung des Mundes, werden als positive oder negative Signale empfunden, auch die implizite Gewichtung der einzelnen graphischen Elemente in der Gesamtbeurteilung eines Gesichtes ist unterschiedlich.

In der Statistik wurden neben den hier vorgestellten Varianten noch weitere holistische Darstellungsformen (Kleiner/Hartigan, 1981; Chambers et al., 1983; Heiler et al., 1992) entwickelt, auf die hier aus Raumgründen nicht weiter eingegangen wird.

### 2.2.3. Viele Alternativen

Soll eine sehr große Zahl von Alternativen graphisch dargestellt werden, so muß in der Darstellungsform eine Verdichtung der einzelnen Attributwerte der Alternativen vorgenommen werden. Von mehreren Autoren (Lehert/de Wasch, 1983; Mareschal/Brans, 1988; Lewandowski/Granat, 1991; Vetschera, 1992) wurde dazu die Verwendung faktorenanalytischer Techniken vorgeschlagen. Durch Projektion der Alternativen auf zwei Faktoren kann eine anschauliche zweidimensionale Darstellung erzielt werden, die eine Abschätzung der Ähnlichkeit zwischen Alternativen, der Korrelation von Attributen und der Zielerreichungen der Alternativen in den Attributen erlaubt (Abbildung 7).

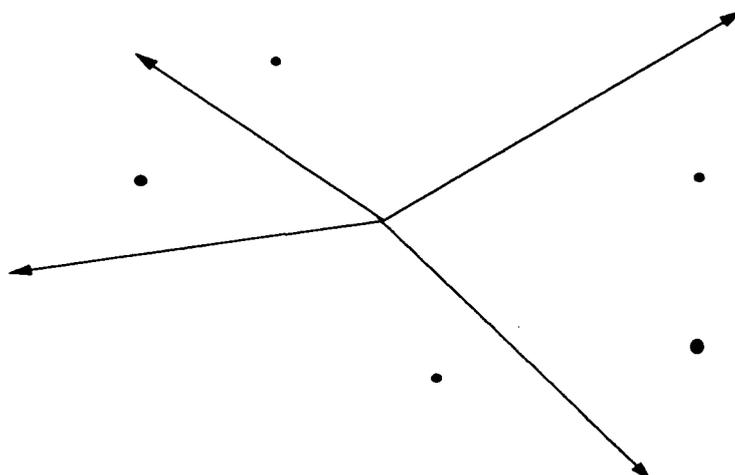


Abbildung 7: Faktorenanalytische Darstellung

Die im Diagramm eingezeichneten Achsen entsprechen den Attributen, der Winkel zwischen den Achsen drückt die Korrelation der Datenwerte der Alternativen zwischen den Attributen aus. Die Datenpunkte repräsentieren Alternativen. Der Punkt, an dem eine Alternative dargestellt ist, ergibt sich aus einer Linearkombination der Attributvektoren, wobei die Datenwerte der Alternative als Gewichtungsfaktoren dienen. Eine Alternative wird also tendenziell umso weiter in der Richtung eines Attributvektors vom Zentrum entfernt dargestellt, je besser sie in dem betrachteten Attribut ist.

### **3. Visualisierung ordinaler Präferenzaussagen**

#### **3.1. Grundlagen**

Ordinale Präferenzaussagen sind Aussagen der Form "Alternative X wird Alternative Y vorgezogen". Derartige Aussagen können sowohl als Input des Benutzers (etwa in einem Verfahren zur Bestimmung einer Nutzenfunktion, das auf holistischen Vergleichen beruht) als auch als Ergebnis eines Entscheidungsverfahrens auftreten. Die Möglichkeiten zur graphischen Darstellung derartiger Aussagen hängen von den Eigenschaften der zugrundeliegenden Präferenzrelation ab. Ist die Präferenzrelation vollständig und transitiv, so kann die sich daraus ergebende vollständige Ordnung der Alternativen unmittelbar für deren Anordnung in der Graphik herangezogen werden. Probleme bei der Visualisierung ergeben sich daher nur bei unvollständigen oder intransitiven Relationen. Solche Relationen können jedoch während der Lösung von Entscheidungsproblemen mit mehrfacher Zielsetzung durchaus auftreten. Zum einen können Präferenzinformationen des Anwenders unvollständig oder intransitiv sein, wenn der Benutzer nicht bereit ist, zwischen einigen Alternativen Paarvergleiche anzustellen oder in seinen Vergleichen die Transitivitätsbedingung (bewußt oder unbewußt) verletzt. Zum anderen liefern einige Entscheidungsverfahren bei mehrfacher Zielsetzung, insbesondere Verfahren auf der Grundlage von Prävalenzrelationen, selbst unvollständige oder intransitive Relationen als Ergebnis.

Grundsätzlich kann bei der Visualisierung ordinaler Präferenzaussagen davon ausgegangen werden, daß die Relation in Form eines Graphen dargestellt wird, in dem die Knoten die betrachteten Alternativen und die Kanten die Präferenzaussagen repräsentieren. Die Interpretation der Darstellung durch den Benutzer wird dabei wesentlich erleichtert, wenn die Anordnung der Knoten (d.h. der Alternativen) ebenfalls an der darzustellenden Relation orientiert ist, wenn also "gute" Alternativen tendenziell in einem bestimmten Bereich (etwa am rechten Rand) und "schlechte" Alternativen tendenziell im entgegengesetzten Bereich dargestellt werden. Die Anordnung entlang einer Achse am Bildschirm entspricht jedoch zwangsläufig selbst einer vollständigen und transitiven Ordnung.

Zur Darstellung unvollständiger Präferenzrelationen müssen daher zumindest noch die Kanten des Graphen explizit, etwa in Form von Verbindungslinien zwischen den Knoten, gezeichnet werden, so daß der Benutzer aus dem Fehlen einer Verbindungslinie erkennen kann, daß die Relation zwischen zwei Alternativen nicht gilt. Bei intransitiven Relationen sind, nach der Art der auftretenden Intransitivitäten, zwei weitere Fälle zu unterscheiden:

1. Es treten lediglich Intransitivitäten in der Form auf, daß aus der Transitivität folgende Präferenzaussagen nicht gemacht werden, d.h. für drei Alternativen  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  gilt zwar  $X \succ Y$  und  $Y \succ Z$ , aber weder  $X \succ Z$  noch  $Z \succ X$ .
2. Es treten Intransitivitäten in der Form auf, daß die Relation der Transitivität widersprechende Präferenzaussagen enthält, also für die drei Alternativen  $X \succ Y$  und  $Y \succ Z$  aber  $Z \succ X$  gilt.

Der erste Fall ist weniger problematisch, da hier durch das Fehlen einer Verbindungslinie die fehlende Beziehung verdeutlicht werden kann. Allerdings ist auch hier zu bedenken, daß die Anordnung an Bildschirm doch einen gewissen Eindruck von Transitivität erwecken kann, der durch die Relation eventuell nicht gerechtfertigt ist. Im zweiten Fall verläuft eine Kante des Graphen entgegengesetzt zur Richtung, in der sonst Präferenz ausgedrückt wird. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes können die betroffenen Kanten, etwa durch Verwendung einer anderen Farbe, hervorgehoben werden.

Daraus ergibt sich als wesentliches Problem bei der Visualisierung ordinaler Präferenzaussagen die Anordnung der Symbole der einzelnen Alternativen am Bildschirm. In der Folge sollen drei Konzepte zur Lösung dieses Problems vorgestellt werden.

### 3.2. Lösung des Anordnungsproblems durch ein Optimierungsmodell

Das Problem unvollständiger Relationen kann dadurch umgangen werden, daß die Dominanzrelation im zweidimensionalen Raum zur Visualisierung der darzustellenden Relation benutzt wird. Eine im Sinne der darzustellenden Präferenzrelation "bessere" Alternative wird dabei etwa rechts oberhalb einer "schlechteren" Alternative dargestellt, unvergleichbare Alternativen werden rechts unterhalb bzw. links oberhalb angeordnet (Abbildung 8).

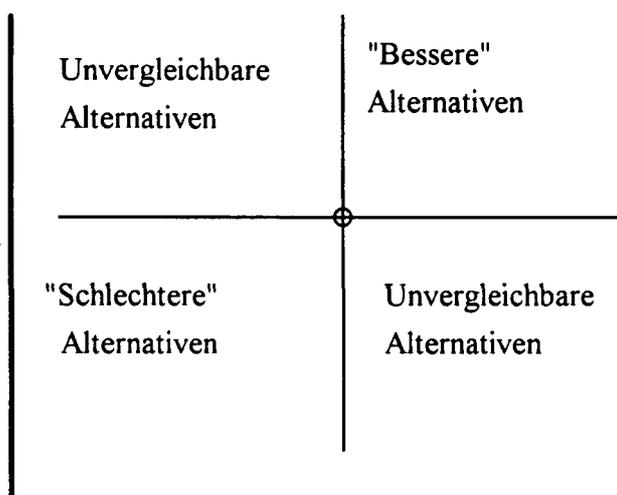


Abbildung 8: Zweidimensionale Dominanzrelation zur Darstellung unvollständiger Präferenzrelationen

Zur Ermittlung der Positionen, an denen die einzelnen Alternativen dargestellt werden, kann das folgende gemischt-ganzzahlige Optimierungsmodell dienen (Wolwach, 1992):

$$\begin{aligned}
 & \sum t_{ij} + \sum u_{ij} = \min! \\
 & \left. \begin{aligned} x_i &\geq x_j \\ y_i &\geq y_j \\ x_i + y_i &> x_j + y_j \end{aligned} \right\} \forall i \mathbb{R} j \\
 & \left. \begin{aligned} x_i &< x_j + M \cdot t_{ij} \\ y_i + M \cdot t_{ij} &> y_j \\ x_i + M \cdot u_{ij} &> x_j \\ y_i &< y_j + M \cdot u_{ij} \end{aligned} \right\} \forall i, j: i \mathbb{R} j, j \mathbb{R} i \\
 & t_{ij}, u_{ij} \in \{0, 1\}
 \end{aligned} \tag{1}$$

In Modell (1) stellen  $x_i$  und  $y_i$  die Koordinaten dar, an denen Alternative  $i$  abgebildet wird,  $x_j$  und  $y_j$  entsprechen den Koordinaten der Alternative  $j$ . Die binären Variablen  $t_{ij}$  und  $u_{ij}$  sind genau dann gleich 1, wenn zwei nach der darzustellenden Relation unvergleichbare Alternativen in Quadranten zueinander angeordnet werden, die eigentlich vergleichbaren Alternativen vorbehalten sind (also eine der beiden unvergleichbaren Alternativen rechts oberhalb der anderen Alternative angeordnet wird). Die Zielfunktion minimiert die Anzahl dieser unkorrekten Anordnungen.

Das Problem dieses Modells liegt darin, daß zur Darstellung von  $n$  Alternativen ein gemischt-ganzzahliges Optimierungsmodell mit  $2n^2$  binären Variablen gelöst werden muß, so daß diese Vorgangsweise bereits bei einer relativ geringen Zahl von Alternativen zu unakzeptabel hohem Rechenaufwand führt. Die naheliegende Vereinfachung, anstelle der binären Variablen kontinuierliche Variablen zu benutzen und anstelle der Gesamtzahl der Fehlpositionierungen deren Ausmaß zu minimieren, führt jedoch dazu, daß unvergleichbare Alternativen häufig am selben Punkt angeordnet werden und stellt daher ebenfalls keine brauchbare Variante dar.

Der zentrale Vorteil dieses Ansatzes liegt darin, daß er als einziges unter den hier behandelten Konzepten eine anschauliche Darstellung der Unvergleichbarkeit von Alternativen bietet. Möglicherweise kann der Ansatz durch die Verwendung geeigneter heuristischer Lösungsverfahren so weiterentwickelt werden, daß er für den praktischen Einsatz geeignet wird.

### 3.3. Multidimensionale Skalierung

Als weiteres Konzept zur Visualisierung von Präferenzrelationen wurde in der Literatur die statistische Methode der multidimensionalen Skalierung (Kruskal, 1964) vorgeschlagen (Rivett, 1977; Rivett, 1980). In diesem Verfahren wird versucht, eine zweidimensionale Anordnung von Datenpunkten zu finden, durch die eine gegebene Abstandsgröße  $\hat{d}_{ij}$  zwischen zwei Objekten  $i$  und  $j$  möglichst gut approximiert wird. Als Maß für die Güte der Approximation dient dabei die sogenannte "Stress"-Größe  $s$ , die durch

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i \neq j} (d_{ij} - \hat{d}_{ij})^2}{\sum_{i \neq j} (d_{ij} - \bar{d}_{ij})^2}} \tag{2}$$

definiert ist und die durch numerische Methoden minimiert wird. In Formel (2) ist  $d_{ij}$  der tatsächliche Abstand zwischen den Datenpunkten  $i$  und  $j$  in der graphischen Darstellung,  $\hat{d}_{ij}$  ein vorgegebener Sollabstand zwischen den beiden Objekten und  $\bar{d}_{ij}$  das arithmetische Mittel der  $d_{ij}$ . Um eine Relation  $R$  graphisch darzustellen, können etwa die folgenden Abstände vorgegeben werden (Rivett, 1980, S.82):

$$\hat{d}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } iRj \\ 2 & \text{falls } iRj \text{ aber } iRk \text{ und } kRj \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad (3)$$

Zahlreiche Experimente (Rivett, 1977; Rivett, 1980) haben gezeigt, daß durch diese sehr einfache Vorgabe eine sehr gute graphische Approximation einer Relation erzielt werden kann.

Bei der Anwendung dieses Verfahrens zur Visualisierung von Präferenzrelationen ergeben sich jedoch zwei Probleme:

1. Die Interpretation der Relation  $R$  im Kontext eines Entscheidungsproblems ist unklar. In Anwendungen der multidimensionalen Skalierung auf die statistische Datenanalyse ist  $R$  eine Relation, die die Ähnlichkeit von Datenpunkten repräsentiert. So konnten z.B. Landkarten mit den Bundesstaaten der USA durch dieses Verfahren rekonstruiert werden, indem als Ausgangsdaten die Relation "Bundesstaat  $i$  grenzt an Bundesstaat  $j$ " spezifiziert wurde. In den Arbeiten von Rivett, insbesondere in (Rivett, 1980), wird  $R$  als Indifferenzrelation bezeichnet. Interpretiert man  $R$  jedoch strikt als Indifferenz, so ist nicht klar, warum sich aus der Aneinanderreihung von Indifferenzen eine Reihenfolge ergeben soll, die der Präferenz des Benutzers entspricht. Wird hingegen  $R$  als echte Präferenz interpretiert, so ist anzunehmen, daß der Benutzer Präferenzen vor allem dann formulieren kann, wenn sich die Alternativen in ihrer Bewertung deutlich voneinander unterscheiden, was wiederum dem Konzept der Ähnlichkeit in der multidimensionalen Skalierung widerspricht. Am ehesten kann die Relation  $R$  noch als schwache Präferenz interpretiert werden, wie sie etwa in einigen Ansätzen auf der Grundlage von Prävalenzrelationen (Roy, 1991) benutzt wird.
2. Das Verfahren setzt voraus, daß die Relation  $R$  intransitiv ist. Vollständige Transitivität würde dazu führen, daß sämtliche Alternativen am selben Punkt abgebildet werden (Rivett, 1980, S. 82).

### 3.4. Topologisches Sortieren

Die Darstellung der Präferenzrelation als gerichteter Graph legt es nahe, graphentheoretische Algorithmen zur Anordnung der Alternativen einzusetzen. Unter topologischem Sortieren eines Graphen (Neumann, 1987; Dinkelbach, 1992) versteht man in der Graphentheorie ein Verfahren, das jedem Knoten eines (gerichteten) Graphen, ausgehend von dessen Quellen, eine Ordnungszahl zuweist. Vereinfachend kann dieser Algorithmus wie folgt formuliert werden:

1. Setze einen Zähler auf 1
2. Wähle einen Knoten, der keine eingehende Kante aufweist, aus. Existiert kein solcher Knoten und ist der Graph nicht leer, so enthält der Graph eine Schleife und der Algorithmus wird abgebrochen.
3. Weise dem ausgewählten Knoten den Wert des Zählers als Ordnungszahl zu und erhöhe den Zähler um 1.
4. Eliminiere den ausgewählten Knoten und alle von ihm ausgehenden Kanten aus dem Graphen. Ist der Graph nun leer, ist das Verfahren beendet, andernfalls wird es in Schritt 2 fortgesetzt.

Die so ermittelte Reihenfolge der Knoten ist für die graphische Darstellung der Präferenzrelation jedoch nur bedingt geeignet. Da für die Knoten Ordnungszahlen in strikt aufsteigender Reihenfolge vergeben werden, entsteht eine lineare Abfolge der Knoten, in der Kanten eventuell so eingezeichnet werden müssen, daß sie mehrere Knoten überspringen. Zur Illustration dieses Problems soll die in der Inzidenzmatrix (4) dargestellte Präferenzrelation dienen:

	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>
A <sub>1</sub>	0	1	0	1
A <sub>2</sub>	0	0	0	1
A <sub>3</sub>	0	0	0	1
A <sub>4</sub>	0	0	0	0

(4)

In Schritt 2 ist der topologische Sortieralgorithmus undeterminiert, falls mehrere Knoten die Bedingung erfüllen. Unter der Annahme, daß in solchen Fällen jeweils der Knoten mit der kleinsten Nummer gewählt wird, reiht der Algorithmus die Knoten in der Reihenfolge A<sub>1</sub>, A<sub>3</sub>, A<sub>2</sub> und A<sub>4</sub>. Abbildung 9 zeigt die so erzeugte Graphik.

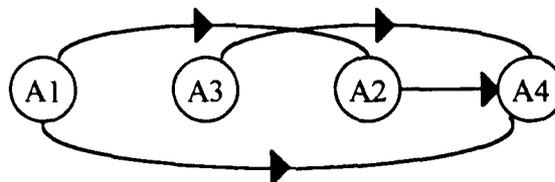


Abbildung 9: Graphische Darstellung aufgrund der topologischen Sortierung

Die Darstellung kann wesentlich verbessert werden, indem in jeder Iteration des topologischen Sortieralgorithmus sämtlichen Knoten, die die Bedingung aus Schritt 2 erfüllen, die gleiche Ordnungszahl zugewiesen wird. In der graphischen Darstellung könnten dann Knoten mit gleicher Ordnungszahl entlang der zweiten Dimension angeordnet werden. Daraus ergibt sich Abbildung 10. Ein ähnlicher Algorithmus wurde auch von (Warfield, 1973) vorgeschlagen.

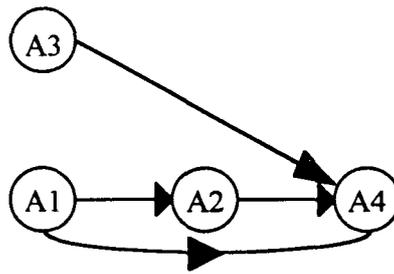


Abbildung 10: Darstellung durch erweitertes topologisches Sortieren

Auch bei diesem Verfahren verbleiben einige Probleme. Das erste Problem betrifft die Anordnung von Knoten mit gleicher Ordnungszahl entlang der zweiten Dimension. Ein mögliches Kriterium für diese Anordnung ist die Zahl der sich ergebenden Kreuzungen zwischen Kanten. Die vollständige Minimierung dieses Kriteriums würde jedoch vermutlich zu hohem Rechenaufwand erfordern.

Ein weiteres Problem ergibt sich daraus, daß topologisches Sortieren einen schleifenfreien Graphen voraussetzt. Dies bedeutet, daß die Präferenzrelation keine Elemente enthalten darf, die der Transitivitätsbedingung widersprechen. Für die Darstellung von Relationen, die dieser Bedingung nicht genügen, müssen Verfahren zur Behandlung von Zyklen entwickelt werden. Denkbar wäre etwa, allen in einem Zyklus enthaltenen Knoten die selbe Ordnungszahl zuzuweisen. Dies würde allerdings in der graphischen Darstellung ebenfalls zu Problemen führen, da dann möglicherweise sehr viele Alternativen "übereinander" angeordnet und durch Kanten verbunden werden müßten.

Zusammenfassend kann somit festgestellt werden, daß die Visualisierung ordinaler Präferenzaussagen in Zusammenhang mit Mehrziel-Entscheidungsproblemen noch viele offene Fragen aufweist, die ein breites Feld für zukünftige Forschungsarbeiten ergeben.

#### 4. Visualisierung kardinaler Präferenzaussagen

Für die Darstellung kardinaler Präferenzaussagen, also etwa einer kardinalen Nutzenbewertung von Alternativen, kann im wesentlichen auf die gleichen Darstellungsformen zurückgegriffen werden wie bei der Darstellung von Datenwerten. Auf die einzelnen Ansätze muß daher hier nicht nochmals eingegangen werden.

An dieser Stelle sollen lediglich zwei Aspekte diskutiert werden, die in diesem Zusammenhang zu spezifischen Problemen und damit zu spezifischen Lösungsansätzen führen. Es sind dies die Integration der Darstellung von Präferenzinformationen mit Datenwerten und die Darstellung von Präferenzinformationen in Zusammenhang mit hierarchischen Zielsystemen.

##### 4.1. Integration der Darstellung von Datenwerten und Präferenzinformationen

In (Vetschera, 1992) wurde ein Ansatz entwickelt, der die Darstellung von Datenwerten und kardinalen Gesamtbewertungen von Alternativen miteinander kombiniert. Für die Darstellung der Datenwerte wird eine faktorenanalytische Projektion benutzt. Die faktorenanalytische Projektion einer (normierten)

Datenmatrix  $X$ , die Daten von  $K$  Alternativen enthält, in die zweidimensionale Darstellungsebene läßt sich formal als Postmultiplikation der Datenmatrix mit einer  $[K \times 2]$  Projektionsmatrix  $P$  ausdrücken. Ergibt sich die kardinale Bewertung der Alternativen aufgrund eines einfachen Zielgewichtungsansatzes, so kann eine weitere  $[K \times 2]$  Projektionsmatrix  $Q$  zur Darstellung der Präferenzinformation definiert werden. Die erste Spalte von  $Q$  enthält die Zielgewichte, die zweite Spalte wird faktorenanalytisch durch Projektion auf einen einzigen Faktor ermittelt. Durch Projektion mit Matrix  $Q$  werden die Alternativen am Bildschirm entlang einer Achse in der Reihenfolge ihrer Nutzenwerte angeordnet. Die beiden Projektionsformen können durch Bildung einer Linearkombination

$$T = \lambda P + (1 - \lambda)Q \quad (5)$$

miteinander kombiniert werden. Durch (interaktive) Wahl des Projektionsparameters  $\lambda$  kann der Benutzer die für ihn geeignetste Projektionsform auswählen. Abbildung 11 zeigt die Anwendung dieser Technik in einem Programmsystem zur Entscheidungsunterstützung in Problemen bei mehrfacher Zielsetzung (Vetschera, 1993).

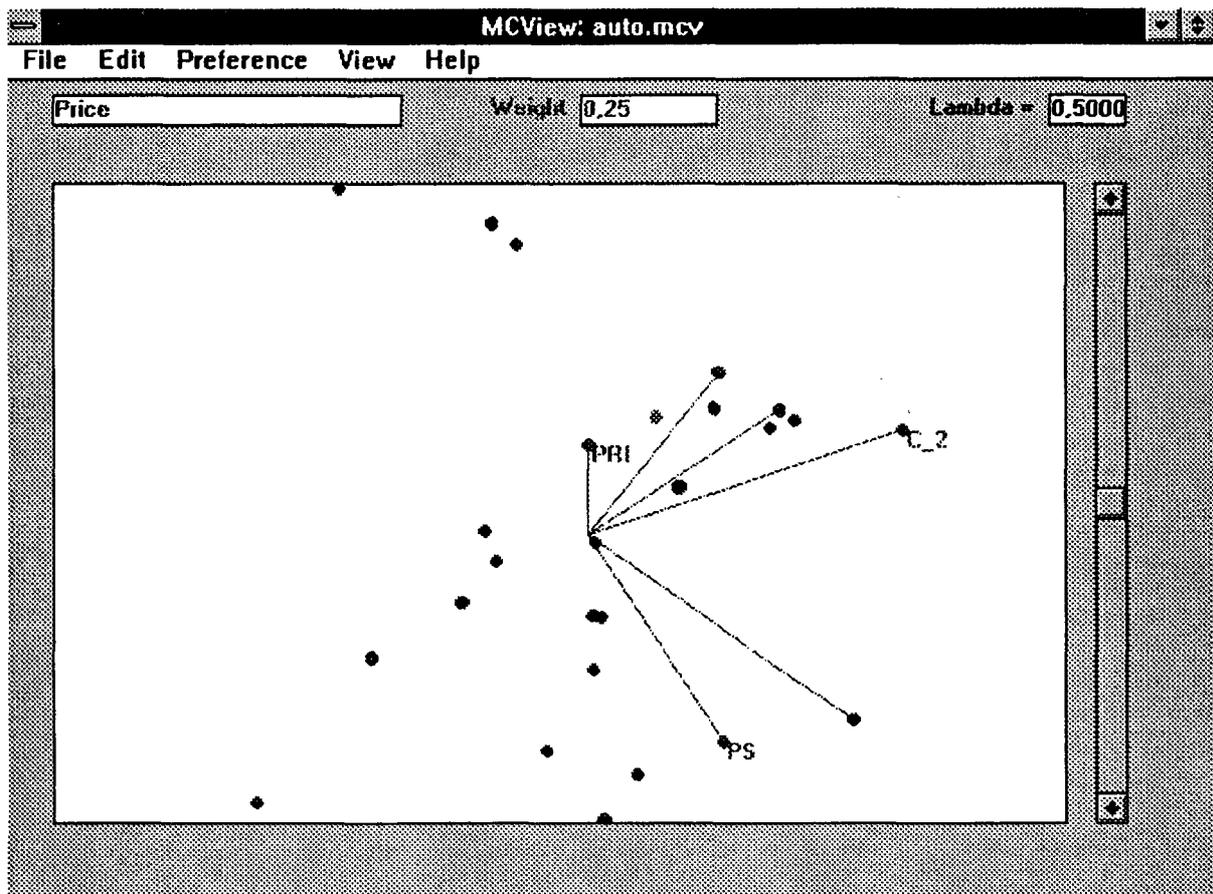


Abbildung 11: Programmtechnische Realisierung der Projektion (5)

#### 4.2. Darstellung kardinaler Präferenzinformationen in hierarchischen Zielsystemen

In Zusammenhang mit hierarchischen Zielsystemen ist es für den Anwender möglicherweise auch interessant, zu erfahren, in welchem Ausmaß die einzelnen Unterziele zur Gesamtbewertung einer Alternative beitragen. In Programmsystemen zur Unterstützung von Entscheidungsverfahren, die auf einer hierarchischen Zielstruktur aufbauen, wie insbesondere dem Analytic Hierarchy Process, werden daher häufig graphische Darstellungsformen eingesetzt, die diese Zusammenhänge verdeutlichen sollen. Eine einfache Darstellungsform für diesen Zweck sind geschichtete Balkendiagramme. Abbildung 12 zeigt einen Bildschirmausschnitt aus einem derartigen Programm.

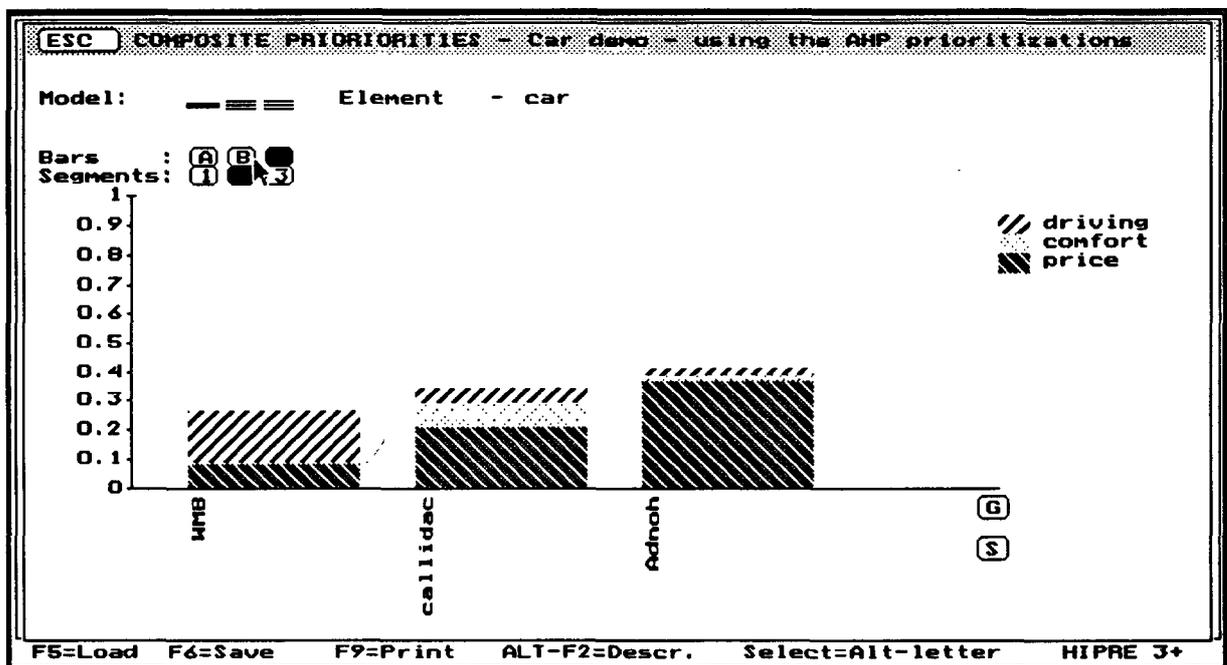


Abbildung 12: Geschichtete Balkendiagramme zur Darstellung kardinaler Präferenzen in einem hierarchischen Zielsystem (Hämäläinen/Lauri, 1992)

Aus der Darstellung wird deutlich erkennbar, daß die Bewertung der Alternative "WMB" vor allem aus dem Attribut "Driving" resultiert, die Bewertung der Alternative "Adnoh" vor allem aus dem Attribut "Price".

#### 5. Zusammenfassung und Ausblick

Mit der zunehmenden Entwicklung interaktiver entscheidungsunterstützender Systeme gewinnt die Auswahl und Entwicklung geeigneter visueller Darstellungsformen für Mehrzielprobleme an Bedeutung. In dieser Arbeit wurde ein Überblick über die vielfältigen Ansätze gegeben, die in der Literatur bisher entwickelt wurden und die für diesen Problembereich von Bedeutung erscheinen.

Dabei wurde zunächst deutlich, daß innerhalb der aufgezeigten Ansätze noch zahlreiche Fragen offen sind. Beispiele dafür sind etwa Probleme bei der Interpretation holistischer Darstellungsformen oder Algorithmen zur Visualisierung unvollständiger und intransitiver Präferenzrelationen.

Für den Einsatz der Verfahren in entscheidungsunterstützenden Systemen ebenso bedeutsam sind Fragen des Vergleichs der einzelnen Ansätze. Für welche (Teil-) Aufgaben sind etwa holistische oder faktorenanalytische Darstellungsformen oder Formen der konventionellen Geschäftsgraphik besonders geeignet? Abgesehen von der umfangreichen empirischen Literatur zur konventionellen Geschäftsgraphik sind diese Fragen bisher weder theoretisch noch empirisch intensiv untersucht worden. Der hier gegebene Überblick soll einen Anstoß zur intensiveren Auseinandersetzung mit diesen Problemen, auch aus entscheidungstheoretischer Sicht, geben.

## Literatur

- Angehrn, A.A. (1991): *Triple C: Visual Interaction for Individual and Group Decision Support*. In: Unicom Ltd. (Ed.): *Computer Supported Collective Work - the Multimedia and Networking Paradigm*. Unicom Seminars Ltd, Uxbridge: 101-109.
- Bamberg, G.; Coenenberg, A.G. (1992): *Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre*. Vahlen, München.
- Benbasat, I.; Dexter, A.S.; Todd, P. (1986): *An Experimental Program Investigating Color Enhanced and Graphical Information Presentation: An Integration of the Findings*. *Communications of the ACM* 29: 1094-1105.
- Bruckner, L.A. (1978): *On Chernoff Faces*. In: P. C. C. Wang (Ed.): *Graphical Representation of Multivariate Data*. Academic Press, New York: 93-121.
- Chambers, J.M.; Cleveland, W.S.; Kleiner, B.; Tukey, P.A. (1983): *Graphical Methods for Data Analysis*. The Wadsworth Statistics/Probability Series. Wadsworth International, Belmont, CA.
- Chernoff, H. (1973): *The Use of Faces to Represent Points in k-Dimensional Space Graphically*. *Journal of the American Statistical Association* 68: 361-368.
- Desai, A.; Walters, L.C. (1991): *Graphical Presentations of Data Envelopment Analyses: Management Implications from Parallel Axes Representations*. *Decision Sciences* 22: 335-353.
- DeSanctis, G. (1984): *Computer Graphics as Decision Aids: Directions for Research*. *Decision Sciences* 15: 463-487.
- Dickson, G.W.; DeSanctis, G.; McBride, D.J. (1986): *Understanding the Effectiveness of Computer Graphics for Decision Support. A Cumulative Experimental Approach*. *Communications of the ACM* 29: 40-47.
- Dinkelbach, W. (1992): *Operations Research*. Springer, Berlin et al.
- Expert Choice Inc. (1990): *Expert Choice Reference Manual*. Pittsburgh.
- Flury, B.; Riedwyl, H. (1981): *Graphical Representation of Multivariate Data by Means of Asymmetrical Faces*. *Journal of the American Statistical Association* 76: 757-765.
- Hämäläinen, R.P.; Lauri, H. (1992): *HIPRE 3+ User's Guide*. System Analysis Laboratory, Helsinki University of Technology.
- Heiler, S.; Michels, P.; Abberger, K. (1992): *Abiturzeugnisse und Studienwahl - ein Beispiel zur Anwendung graphischer Verfahren in der Explorativen Datenanalyse*. Diskussionsbeitrag, 136/s, Universität Konstanz, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik.
- Inselberg, A. (1985): *The plane with parallel coordinates*. *The Visual Computer* 1: 69-91.
- Jacob, R.J.K. (1978): *Facial Representation of Multivariate Data*. In: P. C. C. Wang (Ed.): *Graphical Representation of Multivariate Data*. Academic Press, New York: 143-168.
- Jarvenpaa, S.L.; Dickson, G.W. (1988): *Graphics and Managerial Decision Making: Research Based Guidelines*. *Communications of the ACM* 31: 764-774.
- Kasanen, E.; Östermark, R.; Zeleny, M. (1991): *Gestalt System of Holistic Graphics: New Management Support View of MCDM*. *Computers and Operations Research* 18: 233-239.

- Kleiner, B.; Hartigan, J.A. (1981): *Representing Points in Many Dimensions by Trees and Castles*. Journal of the American Statistical Association 76: 260-269.
- Korhonen, P. (1991): *Using harmonious houses for visual pairwise comparison of multiple criteria alternatives*. Decision Support Systems 7: 47-54.
- ✧ Korhonen, P. (1992): *Multiple criteria decision support - the state of research and future directions*. Computers and Operations Research 19: 549-551.
- Korhonen, P.; Moskowitz, H.; Wallenius, J. (1992): *Multiple criteria decision support - A review*. European Journal of Operational Research 63: 361-375.
- Kruskal, J.B. (1964): *Nonmetric Multidimensional Scaling: A Numerical Method*. Psychometrika 29: 115-129.
- Laux, H. (1991): *Entscheidungstheorie*. Springer, Berlin et al.
- Lehert, P.; de Wasch, A. (1983): *Representation of Best Buys for a Heterogenous Population*. In: P. Hansen (Ed.): *Essays and Surveys on Multiple Criteria Decision Making*. Springer, Berlin: 221-228.
- Lewandowski, A.; Granat, J. (1991): *Dynamic BIPLLOT as an Interaction Interface for Aspiration-Based Decision Support Systems*. In: P. Korhonen, A. Lewandowski and J. Wallenius (Eds.): *Multiple Criteria Decision Support*. Springer, Berlin: 229-241.
- Mareschal, B.; Brans, J.-P. (1988): *Geometrical representations for MCDA*. European Journal of Operational Research 34: 69-77.
- Miller, G.A. (1956): *The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information*. Psychological Review 63: 81-97.
- Neumann, K. (1987): *Graphen und Netzwerke*. In: T. Gal (Ed.): *Grundlagen des Operations Research*. Springer, Berlin et al.: 1-164.
- Rivett, P. (1977): *Multidimensional Scaling for Multiobjective Policies*. Omega 5: 367-379.
- Rivett, P. (1980): *Indifference Mapping for Multiple Criteria Decisions*. Omega 8: 81-93.
- Roy, B. (1991): *The Outranking Approach and the Foundations of ELECTRE Methods*. Theory and Decision 31: 49-73.
- ✧ Schilling, D.A.; McGarity, A.; ReVelle, C. (1982): *Hidden Attributes and the Display of Information in Multiobjective Analysis*. Management Science 28: 236-242.
- Sobol, M.G.; Klein, G. (1989): *New Graphics as Computerized Displays for Human Information Processing*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics 19: 893-898.
- Vetschera, R. (1991): *Entscheidungsunterstützende Systeme für Gruppen*. Physica-Schriften zur Betriebswirtschaft. Physica, Heidelberg.
- Vetschera, R. (1992): *A preference-preserving projection technique for MCDM*. European Journal of Operational Research 61: 195-203.
- ✧ Vetschera, R. (1993): *MCView: An integrated graphical system to support multi-attribute decisions*. Decision Support Systems 11: (im Druck).

Warfield, J.N. (1973): *On Arranging Elements of a Hierarchy in Graphic Form*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics 3: 121-132.

Wolwach, N. (1992): *Graphical Representation of Binary Relations on Discrete Sets of Alternatives*. Unveröffentlichtes Manuskript, TU Dresden

Zelasny, G. (1989): *Wie aus Zahlen Bilder werden*. Gabler, Wiesbaden.

Zionts, S. (1992): *Some Thoughts on Research in Multiple Criteria Decision Making*. Computers and Operations Research 19: 567-570.