

Drexl, Andreas; Kimms, Alf

Working Paper — Digitized Version

Belastungsorientierte Just-in-Time Variantenfließfertigung

Manuskripte aus den Instituten für Betriebswirtschaftslehre der Universität Kiel, No. 502

Provided in Cooperation with:

Christian-Albrechts-University of Kiel, Institute of Business Administration

Suggested Citation: Drexl, Andreas; Kimms, Alf (1999) : Belastungsorientierte Just-in-Time Variantenfließfertigung, Manuskripte aus den Instituten für Betriebswirtschaftslehre der Universität Kiel, No. 502, Universität Kiel, Institut für Betriebswirtschaftslehre, Kiel

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/147590>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

Manuskripte
aus den
Instituten für Betriebswirtschaftslehre
der Universität Kiel

Nr. 502

**Belastungsorientierte
Just-In-Time
Variantenfließfertigung**

Andreas Drexl und Alf Kimms



1 Problemstellung und Abgrenzung

Die Veränderung wirtschaftlicher Rahmenbedingungen und der Einsatz moderner Produktionstechniken haben in den letzten Jahren zu einem grundlegenden Wandel der Leistungserstellung geführt. Kennzeichnend dafür sind insbesondere wachsende Kundenorientierung, steigende Variantenvielfalt und kürzere Lieferfristen. Die Bedeutung einer materialbestandsorientierten Produktion auf Lager hat in diesem Zusammenhang abgenommen, während die materialflußorientierte Produktion auf Abruf immer wichtiger geworden ist.¹ Im Kontext materialflußorientierter Konzepte der Produktionssteuerung sind kurze Durchlaufzeiten, schnelle Reaktionsmöglichkeiten auf Kundenwünsche, hohe Liefertermintreue und niedrige Bestände von zentraler Bedeutung.² Neben produktionssynchroner Beschaffung subsummiert man vor allem Kanban-Systeme³ sowie die Just-In-Time Produktion⁴ unter materialflußorientierten Konzepten der Produktionssteuerung.

Die Variantenfließfertigung⁵ hat im Kontext materialflußorientierter Konzepte der Produktionssteuerung besondere Bedeutung erlangt. Sie läßt sich als kundenauftragsorientierte Fertigung mit serieller, taktgebundener Montage kennzeichnen. Häufig ist das entsprechende Produktionssegment nach dem Just-in-Time-Prinzip organisiert.⁶ In der Regel werden wenige „Rennerprodukte“ in großen Stückzahlen gefertigt. Meist sind die an Kunden ausgelieferten Endprodukte jedoch nicht identisch, sie unterscheiden sich vielmehr in bestimmten Ausstattungsdetails. Ein typisches Beispiel für Variantenfließfertigung ist die Montage von Kraftfahrzeugen.

Im Rahmen Just-in-Time-orientierter Produktionssteuerungskonzepte wird meist von knappen Kapazitäten abstrahiert, die Bestimmung von Fertigungssequenzen erfolgt also nicht im Hinblick auf die Belastung⁷ der Arbeitsstationen. Vielmehr wird primär darauf geachtet, daß Produkte über die Zeit hinweg und ihrer Nachfrage entsprechend gleichmäßig verteilt hergestellt werden. Die vorliegende Arbeit stellt hingegen ein neues Modell vor, mit dessen Hilfe eine belastungsorientierte Just-in-Time-Produktionssteuerung bei Variantenfließfertigung durchgeführt werden kann. Die unterschiedlichen Varianten stehen dabei in Konkurrenz um die verfügbare Kapazität der Produktionsanlagen. Daraus ergibt sich vor allem in der Endmontage ein erhöhter Koordinationsaufwand. Die Endmontage ist dabei ein mehrstufiger Produktionsprozeß, bei dem die Arbeitsstationen seriell aneinander gereiht sind und jede Arbeitsstation ein eigenes Materialversorgungssystem besitzt. Abb. 1 verdeutlicht diesen Zusammenhang exemplarisch für den Fall von

¹Vgl. hierzu etwa *Knolmayer (1987)* sowie *Inderfurth (1998)*.

²Siehe hierzu insbesondere *Züpfel (1991)*.

³Vgl. hierzu etwa *Berkeley (1992)*, *Bitran/Chang (1987)* sowie *Krajewski et al. (1987)*.

⁴Funktionsweise, Einsatzvoraussetzungen und weitere Aspekte von Just-In-Time-Systemen werden in *Fandel/Francois (1989)*, *Hofmann (1997)*, *Tsai (1995)*, *Reese (1993)* sowie *Yano/Rachamadugu (1991)* diskutiert.

⁵Vgl. hierzu *Decker (1993)*, *Rosenberg (1996)*, *Schneeweiß/Söhner (1991)* sowie *Lochmann (1999)*.

⁶Zur Abgrenzung von anderen Produktionssegmenten vgl. *Drexel et al. (1994)*. Zu den Beziehungen zwischen „Manufacturing Resource Planning (MRP)“ und Just-in-Time siehe *Benton/Shin (1998)*.

⁷Zur belastungsorientierten Auftragsfreigabe, die für das Produktionssegment Werkstattfertigung konzipiert wurde, vgl. *Wiendahl (1996)*. Weitere praxisorientierte Konzepte sind z.B. in *Simons/Simpson (1997)* zu finden.

drei Arbeitsstationen.

In der Literatur werden in dieser Situation bislang entweder Vorgehensweisen vom Typ „Level Scheduling“ oder vom Typ „Car Sequencing“ favorisiert.⁸ Gegenstand des Level Scheduling ist es, die Nachfrage nach Teilen in der Endmontage möglichst konstant zu halten. Im Gegensatz dazu geht es beim Car Sequencing um die Kapazitätsbelastung der Bandstationen.⁹ Beide Ansätze existieren bislang isoliert voneinander. In der vorliegenden Arbeit stellen wir zunächst beide Vorgehensweisen kurz dar. Darauf aufbauend zeigen wir, wie sie sich vereinen lassen und formulieren dementsprechend ein integriertes Level Scheduling/Car Sequencing Modell.

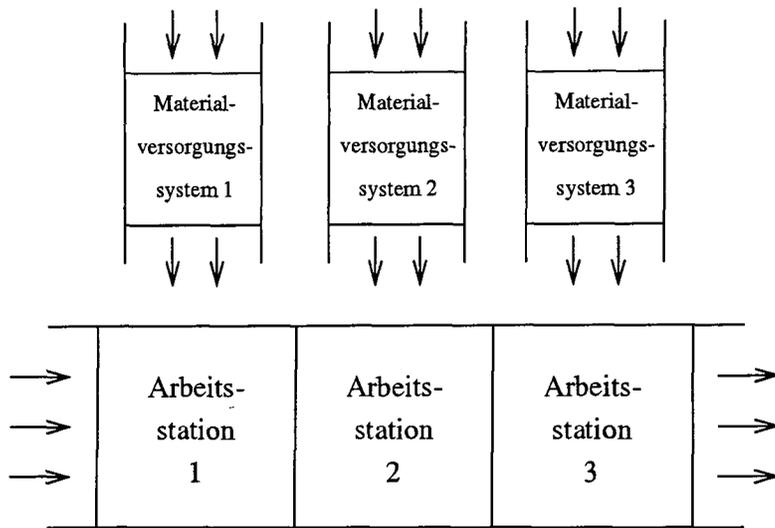


Abbildung 1: Layout der Endmontage

Der Beitrag ist wie folgt aufgebaut: Abschnitt 2 gibt einen Überblick über bisherige Arbeiten. In Abschnitt 3 formulieren wir das integrierte Level Scheduling/Car Sequencing Modell. Gegenstand von Abschnitt 4 ist die Evaluation des neuen Ansatzes. Im Anhang werden die theoretischen Grundlagen der in der vorliegenden Arbeit präsentierten Methodik skizziert.

2 Überblick über bisherige Arbeiten

Im folgenden skizzieren wir zunächst ein zentrales Modell aus dem Bereich des Level Scheduling und gehen anschließend auf Car Sequencing-Modelle ein. Wir verwenden dabei die folgende grundlegende Notation:

⁸Siehe hierzu etwa *Drexel/Jordan* (1995).

⁹Zur hier nicht näher betrachteten Problematik der Austaktung von Bandstationen vgl. v.a. *Domschke et al.* (1997), *Rachamadugu/Yano* (1994), *Scholl* (1995) sowie *van Zante-de Fokkert/de Kok* (1997).

- V : Menge von Varianten, Index v
 D_v : Menge von Produkten (Nachfrage) von Variante v ,
d.h. $D_v = \{1, \dots, |D_v|\}$, Index i
 T : Gesamtproduktionsmenge (Perioden, Zyklen),
d.h. $T := \{1, \dots, \sum_{v \in V} |D_v|\}$, Index t
 r_v : Nachfragerate, d.h. $r_v := |D_v|/T$

2.1 Level Scheduling

Ansätze des Level Scheduling verfolgen die Zielsetzung, die Varianz der Nachfrage nach Teilen zu minimieren und dadurch den Materialfluß zu verstetigen.¹⁰ Gesucht ist also eine Belegung der Linie so, daß der von Variante v gefertigte Anteil der Nachfragerate r_v entspricht.

Die Problemstellung läßt sich unter Verwendung der Parameter

- $f_{v,i}$: Idealposition von Produkt $i \in D_v$ von Variante $v \in V$,
d.h. $f_{v,i} = \frac{(i - \frac{1}{2}) \cdot |T|}{|D_v|}$

und Entscheidungsvariablen

- $x_{v,i}$: positive Zahl zur Bezeichnung der Periode, in der Produkt $i \in D_v$ von Variante $v \in V$ eingeplant wird

wie folgt mathematisch formulieren:

$$\min \sum_{v \in V} \sum_{i \in D_v} (x_{v,i} - f_{v,i})^2 \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad x_{v,i+1} \geq x_{v,i} + 1 \quad (v \in V, i \in D_v \setminus |D_v|) \quad (2)$$

$$x_{v,i} \neq x_{v',i'} \quad ((v, i) \neq (v', i')) \quad (3)$$

$$x_{v,i} \in T \quad (v \in V, i \in D_v) \quad (4)$$

Zur Erläuterung: Die Zielfunktion (1) minimiert die Summe der quadrierten Abweichungen zwischen Idealposition und tatsächlicher Produktionsperiode. Die Nebenbedingungen (2) sorgen dafür, daß die Einplanungsperioden von Produkt zu Produkt monoton anwachsen. Die Restriktionen (3) schließlich sichern die paarweise Ungleichheit der Produktionsperioden.

v	1	2	3	4	5	6
$ D_v $	4	1	2	2	2	3

Tabelle 1: Beispiel — Teil 1

¹⁰Vgl. hierzu etwa *Aigbedo/Monden* (1997), *Bard et al.* (1992, 1994) sowie *Miltenburg* (1989).

Das Modell (1)–(4) ist sehr effizient durch Sortieren der Produkte unter Verwendung der EDD-Regel¹¹ bzgl. der Idealpositionen $f_{v,i}$ optimal lösbar.¹² Zur Verdeutlichung betrachten wir das in Tab. 1 wiedergegebene Beispiel.¹³ Tab. 2 zeigt die Idealpositionen für dieses Beispiel, während Tab. 3 das optimale Level Schedule mit einem Zielfunktionswert von 10.8 enthält.

v	$ D_v $	i			
1	4	1.75	5.25	8.75	12.25
2	1	7.00			
3	2	3.50	10.50		
4	2	3.50	10.50		
5	2	3.50	10.50		
6	3	2.30	7.00	11.60	

Tabelle 2: Idealpositionen $f_{v,i}$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
v	1	6	3	4	5	1	2	6	1	3	4	5	6	1

Tabelle 3: Optimales Level Schedule

Zum Thema Level Scheduling gibt es eine umfangreiche Literatur, in der unterschiedliche Modelle und Methoden sowie anwendungsrelevante Fragen und Probleme angesprochen werden. Aus Platzgründen verzichten wir hier auf Details und verweisen lediglich auf einige ausgewählte Quellen.¹⁴

2.2 Car Sequencing

Die fundamentale Idee des Car Sequencing-Ansatzes läßt sich an folgendem Beispiel (aus der Kraftfahrzeugwirtschaft) verdeutlichen: Nehmen wir an, daß 60% der Fahrzeuge die Option Schiebedach nachfragen. Ferner sei die Situation gegeben, daß fünf Produkte (Fahrzeuge) die Station zur Installation von Schiebedächern in der Zeit, die für die Installation von genau einem Schiebedach benötigt wird, passieren. Daraus folgt, daß

¹¹„Earliest Due Date-Regel“; sie entspricht einer Sortierung nach monoton wachsenden Fälligkeitsterminen.

¹²Vgl. *Inman/Bulfin* (1991); ein ähnlich effizientes Verfahren wurde von *Kubiak/Sethi* (1991) entwickelt.

¹³Entnommen aus *Drexl/Jordan* (1995).

¹⁴*Engel et al.* (1998), *Kim et al.* (1996), *Kubiak* (1993), *Kubiak et al.* (1997), *Miltenburg et al.* (1989, 1990, 1991, 1992), *Steiner/Yeomans* (1994, 1996), *Sumichrast et al.* (1992, 1996).

drei Installations-Teams für die Installation von Schiebedächern erforderlich sind. Daraus ergibt sich „3 : 5“ als Kapazitätsbeschränkung der Endmontage bzgl. der Option Schiebedach.

Die Problemstellung läßt sich unter Verwendung der Parameter

- O : Menge von Optionen, Index o
- $a_{v,o}$: 1, falls Variante $v \in V$ Option $o \in O$ benötigt (0, sonst)
- $H_o : N_o$: höchstens H_o von N_o sukzessive eingeplanten Produkten benötigen Option $o \in O$
- T_o : Menge von unbeschränkten Perioden für Option $o \in O$, d.h. $T_o = T \setminus \{|T| - N_o + 2, \dots, |T|\}$
- $Q_{t,o}^+$: Menge von vorwärts-beschränkten Perioden für Option $o \in O$ bzgl. Periode t , d.h. $Q_{t,o}^+ = \{t, \dots, t + N_o - 1\}$

und Entscheidungsvariablen

$x_{v,t} := 1$, Variante $v \in V$ ist Periode $t \in T$ zugeordnet (0, sonst)

wie folgt mathematisch formulieren:¹⁵

$$\sum_{v \in V} x_{v,t} = 1 \quad (t \in T) \quad (5)$$

$$\sum_{t \in T} x_{v,t} = |D_v| \quad (v \in V) \quad (6)$$

$$\sum_{v \in V} \sum_{\tau \in Q_{t,o}^+} a_{v,o} x_{v,\tau} \leq H_o \quad (o \in O, t \in T_o) \quad (7)$$

$$x_{v,t} \in \{0, 1\} \quad (v \in V, t \in T) \quad (8)$$

Die Nebenbedingungen (5) sorgen dafür, daß genau ein Produkt je Periode eingeplant wird. Die Restriktionen (6) sichern, daß die Nachfrage befriedigt wird. Schließlich ist es Aufgabe der Nebenbedingungen (7), auf die Maximalbelastung der Arbeitsstationen zu achten.

Dieses Modell, insbesondere die Restriktion (7), sorgt für die Beachtung der Kapazität der Stationen. Gleichzeitig läßt sich über diese Restriktion auch die Materialverfügbarkeit sicherstellen. Ein Stillstand des Bandes infolge Überbeanspruchung oder wegen Materialmangel kann damit nicht auftreten.¹⁶

Zur Verdeutlichung greifen wir das obige Beispiel auf. In Tab. 4 ist die Instanz vollständig beschrieben. Tab. 5 gibt eine zulässige Lösung wieder. Tab. 6 verdeutlicht, daß — wie nicht anders zu erwarten — die vom Level Scheduling-Modell (1)–(4) bestimmte (optimale) Lösung unzulässig ist bzgl. der Car Sequencing-Restriktionen. So wird etwa die Restriktion $H_1 : N_1 = 2 : 3$ im Bereich $2 \leq t \leq 4$ verletzt.

¹⁵Eine alternative Modellformulierung ist in *Drexel/Jordan* (1995) zu finden. Zur Lösung des Problems (5)–(8) wurden von *Parelo* (1988), *Parelo et al.* (1986), *Dincbas et al.* (1988) sowie *Drexel/Jordan* (1995) Methoden der logischen Programmierung entwickelt.

¹⁶*Tsai* (1995) erläutert, welche Maßnahmen in Japan bzw. in USA im Falle eines Bandstillstandes ergriffen werden.

o	$H_o : N_o$	$v = 1$	$v = 2$	$v = 3$	$v = 4$	$v = 5$	$v = 6$
1	2 : 3		×	×	×		×
2	2 : 4			×	×		
3	3 : 5		×			×	
4	2 : 6	×			×		
	$ D_v $	4	1	2	2	2	3

Tabelle 4: Beispiel — Teil 2

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
v	1	1	2	3	5	3	1	4	6	5	6	6	1	4
$o = 1$			×	×		×		×	×		×	×		×
$o = 2$				×		×		×						×
$o = 3$			×		×					×				
$o = 4$	×	×					×	×					×	×

Tabelle 5: Car Sequence — zulässige Lösung

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
v	1	6	3	4	5	1	2	6	1	3	4	5	6	1
$o = 1$		×	×	×			×	×		×	×		×	
$o = 2$			×	×						×	×			
$o = 3$					×		×					×		
$o = 4$	×			×		×			×		×			×

Tabelle 6: Level Scheduling vs. Car Sequencing

Im folgenden Abschnitt wenden wir uns der Frage zu, wie sich die Besonderheiten und Vorzüge des Level Scheduling- und des Car Sequencing-Ansatzes kombinieren lassen. Es geht also um die Beantwortung der Frage, wie eine belastungsorientierte Just-In-Time Produktionssteuerung bei Variantenfließfertigung durchgeführt werden kann.

3 Ein integrierender Ansatz

Abschnitt 3 ist wie folgt aufgebaut: In Abschnitt 3.1 formulieren wir ein Set Partitioning-Modell. Dieses Modell hat eine mit wachsender Problemgröße exponentiell wachsende Anzahl an Variablen. In Abschnitt 3.2 wird gezeigt, wie sich diejenigen Spalten, die zur optimalen Lösung der LP-Relaxation erforderlich sind, auf dem Wege der Spaltengenerierung erzeugen lassen. Abschnitt 3.3 verdeutlicht die Vorgehensweise an einem Beispiel.

3.1 Modellformulierung

Das Set Partitioning-Modell läßt sich unter Verwendung der Parameter

- σ : varianten-spezifische Sequenz von Produkten
- \mathcal{S}^v : Menge von Spalten, die eine Sequenz für Variante v repräsentieren, Index k
- $v(k)$: Variante v , die mit Spalte k verknüpft ist
- $b_{v,i,k,t} := 1$, falls Produkt $i \in D_v$ von Variante $v \in V$ in Period $t \in T$ in Sequenz $k \in \mathcal{S}^v$ eingeplant ist (0, sonst)
- $F_{v(k),i,t}$: quadrierte Abweichung bzgl. Produkt $i \in D_{v(k)}$ von Variante $v(k) \in V$ in Sequenz $k \in \mathcal{S}^v$ von Idealposition $f_{v(k),i}$,
d.h. $F_{v(k),i,t} = (t - f_{v(k),i})^2 \cdot b_{v(k),i,k,t}$
- c_k : Zielfunktionskoeffizient von Sequenz k bzgl. Variante $v(k) \in V$,
d.h. $c_k = \sum_{i \in D_{v(k)}} \sum_{t \in T} F_{v(k),i,t}$

und Entscheidungsvariablen

- $y_k := 1$, falls Sequenz $k \in \mathcal{S}^v, v \in V$, Element der optimalen Lösung ist (0, sonst)

wie folgt mathematisch formulieren:¹⁷

$$\min \sum_{v \in V} \sum_{k \in \mathcal{S}^v} c_k y_k \tag{9}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k \in \mathcal{S}^v} y_k = 1 \quad (v \in V) \tag{10}$$

$$\sum_{v \in V} \sum_{i \in D_v} \sum_{k \in \mathcal{S}^v} b_{v,i,k,t} y_k = 1 \quad (t \in T) \tag{11}$$

¹⁷Das Modell (9)–(13) wird auch als Master Problem bezeichnet.

$$\sum_{v \in V} \sum_{i \in D_v} \sum_{k \in S^v} \sum_{\tau \in Q_{t,o}^+} a_{v,o} b_{v,i,k,\tau} y_k \leq H_o \quad (o \in O, t \in T_o) \quad (12)$$

$$y_k \in \{0, 1\} \quad (v \in V, k \in S^v) \quad (13)$$

Zur Erläuterung: Die Zielfunktion (9) minimiert — wie beim Level Scheduling üblich — die Summe der quadrierten Abweichungen zwischen Idealposition und tatsächlicher Produktionsperiode der zu bildenden Sequenz. Die Restriktionen (10) tragen dafür Sorge, daß je Variante genau eine der gebildeten (Teil-)Sequenzen ausgewählt wird. Die Nebenbedingungen (11) sichern, daß je Periode ein Produkt eingeplant wird. Die Restriktionen (12) schließlich entsprechen den Kapazitätsrestriktionen.

Insgesamt haben wir damit ein Modell, das die Just-in-Time-Zielfunktion des Level Scheduling und die belastungsorientierten Restriktionen des Car Sequencing integriert. Die Bedeutung des Modells liegt damit auf der Hand. Methoden zu seiner Lösung sind daher erforderlich.

3.2 Spaltengenerierung

Das im vorhergehenden Abschnitt formulierte Modell stellt in einer Spalte dar, wie die Produkte einer Variante eingeplant werden können. Die Vielzahl derartiger Einplanungsalternativen macht es unmöglich, dieses Modell vollständig hinzuschreiben, um es dann (ggf. mit Standardsoftware) optimal zu lösen. Wir verwenden daher das Prinzip der Spaltengenerierung.¹⁸ Grundidee hierbei ist, ausgehend von einigen wenigen Spalten, die LP-Relaxation zu lösen, um dann zu entscheiden, ob es weitere Spalten geben kann, die den Zielfunktionswert verbessern. Gibt es solche, fügt man sie hinzu und löst die LP-Relaxation des erweiterten Modells erneut. Dieses iterative Verfahren bricht ab, sobald man sicher sein kann, daß es keine weitere Spalte gibt, die den Zielfunktionswert verbessern könnte. Als Ergebnis erhält man die optimale Lösung der LP-Relaxation, also eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert des Modells (9)–(13). Im allgemeinen muß dabei nur ein geringer Anteil aller denkbaren Spalten erzeugt werden, oft ist die optimale Lösung der LP-Relaxation bereits ganzzahlig.

Das Problem der Bestimmung einer Spalte kann als Problem der Bestimmung eines kürzesten Weges in einem kantenbewerteten, gerichteten Graphen dargestellt werden. Abb. 2 zeigt die Struktur des Graphen für Variante 1 von Beispiel 1. Horizontale (diagonale) Pfeile entsprechen der Tatsache, daß in der entsprechenden Periode kein (ein) Produkt von Variante 1 eingeplant wird.

Zur formalen Behandlung des Problems der Bestimmung eines kürzesten Weges verwenden wir die Parameter

- $Q_{t,o}^-$: Menge von rückwärtsbeschränkten Perioden für Option $o \in O$
bzgl. Periode t , d.h. $Q_{t,o}^- = \{t - N_o + 1, \dots, t\} \cap T$
- E^v : Menge von Pfeilen des Graphen von Variante $v \in V$
- $d_{h,j}^v$: Ursprungsbewertung von Pfeil $(h, j) \in E^v$
- $g_{h,j}^v$: aktualisierte Bewertung von Pfeil $(h, j) \in E^v$

¹⁸Vgl. hierzu *Bradley et al. (1977)*.

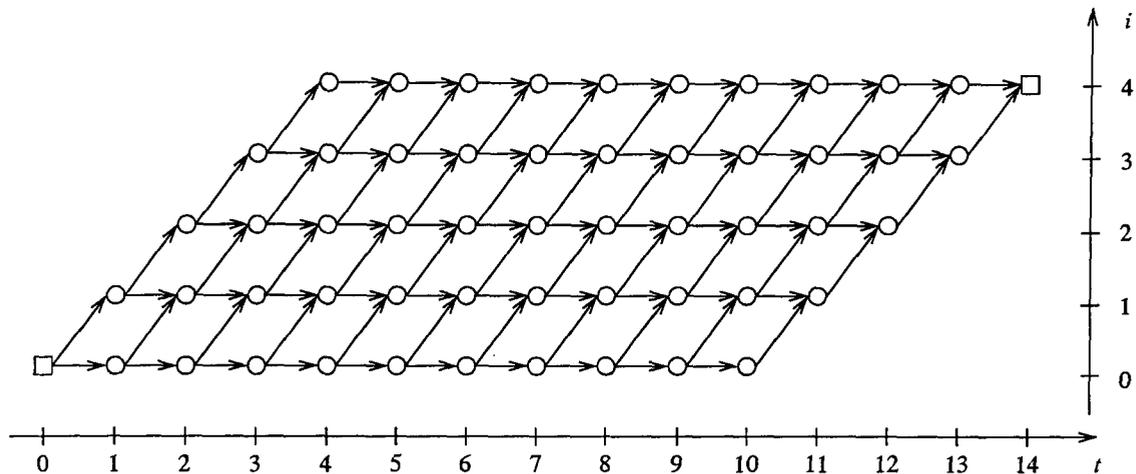


Abbildung 2: Beispiel 1 — kürzester-Wege Graph für Variante 1

und Entscheidungsvariablen:

$$x_{h,j}^v := 1, \text{ Pfeil } (h, j), (h, j) \in E^v, \text{ ist Element des kürzesten Weges (0, sonst)}$$

Definieren wir die mit der optimalen Lösung der LP-Relaxation des aktuellen Modells (9)-(13) korrespondierenden Dualvariablen gemäß

$$\lambda_v : \text{ Dualvariable bzgl. Restriktion (10)}$$

$$\mu_t : \text{ Dualvariable bzgl. Restriktion (11)}$$

$$\pi_{o,t} : \text{ Dualvariable bzgl. Restriktion (12)}$$

so lassen sich die ursprünglichen bzw. die aktualisierten Pfeilbewertungen entsprechend (14) bzw. (15) berechnen.

$$d_{h,j}^v = \begin{cases} 0 & , h = (i, t-1), j = (i, t) \\ (t - f_{v,i})^2 & , h = (i-1, t-1), j = (i, t) \end{cases} \quad (14)$$

$$g_{h,j}^v = \begin{cases} d_{h,j}^v = 0 & , h = (i, t-1), j = (i, t) \\ (d_{h,j}^v - \mu_t + \sum_{o \in O} a_{v,o} \sum_{\tau \in Q_{t,o}^-} \pi_{o,\tau}) & , h = (i-1, t-1), j = (i, t) \end{cases} \quad (15)$$

Die Zielfunktion des kürzesten-Wege Modell ist in (16) wiedergegeben.

$$Z^v = \min \sum_{(h,j) \in E^v} g_{h,j}^v x_{h,j}^v - \lambda_v \quad (16)$$

Gilt in einer bestimmten Iteration des Verfahrens $\min\{Z^v \mid v \in V\} \geq 0$ dann gibt es keine bisher noch nicht betrachtete Spalte, die den Zielfunktionswert verbessern würde (pricing out). Die Herleitung des Subproblems und des Pricing-Kriteriums ist im Anhang zu finden.

Eine formale Beschreibung des Verfahrens kann wie folgt angegeben werden:

1. Bestimme eine initiale Menge S^v an Spalten für jede Variante v .
2. Löse die LP-Relaxation des Modells (9)–(13).
3. Löse ein kürzestes Wege-Modell unter Verwendung der aktuellen Dualvariablen von (9)–(13). Füge dem Modell (9)–(13) für jede Variante $v \in V$ mit $Z^v < 0$ eine Spalte hinzu und gehe zu Schritt 2.
4. Das Verfahren bricht ab, sobald in Schritt 3 keine Variante $v \in V$ mit $Z^v < 0$ mehr gefunden wird (pricing out).

Eine Abschätzung der Anzahl der möglichen Spalten von Variante v ist $|S^v| = \binom{|T|}{|D_v|}$.
 Damit gibt $\sum_{v \in V} |S^v|$ die Anzahl der möglichen Spalten des Master Problems wieder.

3.3 Beispiel

Im folgenden soll die Vorgehensweise unter Verwendung des Beispiels von Tab. 4 veranschaulicht werden. Wir starten mit sechs Spalten, wie in Tab. 7 dargestellt.

	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Spalte	v														
1	1		×			×				×				×	
2	2							×							
3	3				×							×			
4	4				×							×			
5	5				×							×			
6	6		×					×						×	

Tabelle 7: Initiale Spalten

Für jede Variante ist also mindestens eine mögliche Einplanung vorgegeben. Diese initiale Einplanung wurde so gewählt, daß die Produkte möglichst nahe an ihre Idealposition liegen. Diese sechs Spalten stellen zwar noch keinen zulässigen Gesamtplan dar, man kann aber mit Hilfe der M-Methode die LP-Relaxation des Modells lösen und damit die optimalen Dualvariablenwerte bestimmen. Löst man dann für jede Variante das zugehörige kürzeste Wege-Problem, so stellt man fest, daß für jede Variante — wie in Tab. 8 dargestellt — eine neue Spalte erzeugt wird.

Nach der Erzeugung von insgesamt 148 Spalten bricht das Verfahren ab. Diese Lösung ist ganzzahlig und damit auch optimal für das Modell (9)–(13). Das Ergebnis ist in Tab. 9 dargestellt.

	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Spalte	v														
7	1		×			×				×					×
8	2							×							
9	3				×						×				
10	4				×						×				
11	5				×						×				
12	6		×					×							×

Tabelle 8: Weitere Spalten

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
v	1	4	6	5	3	6	1	1	2	3	5	6	4	1
$o=1$		×	×		×	×			×	×		×	×	
$o=2$		×			×					×			×	
$o=3$				×					×		×			
$o=4$	×	×					×	×					×	×

Tabelle 9: Optimale Lösung mit Zielfunktionswert 24,305

4 Evaluation

Die im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Vorgehensweise wurde einem ausführlichen experimentellen Test unterzogen. Zu diesem Zweck wurde das Verfahren unter Verwendung des LP-Solvers von CPLEX¹⁹ in GNU C auf einem Pentium Pro mit 200 MHz implementiert. Zusammengefaßt ergaben sich folgende Ergebnisse:²⁰

- Güte der Schranken: Für ca. 30% der Instanzen wies die Lösung der LP-Relaxation bereits die Eigenschaft der Ganzzahligkeit auf. Mithin war auch das ganzzahlige Problem (9)–(13) optimal gelöst, d.h. untere und obere Schranke fielen zusammen. Ansonsten ergaben sich Abweichungen von unteren und oberen Schranken, die als sehr gut bis akzeptabel zu bezeichnen sind.
- Größe der Instanzen: Es konnten Instanzen mit bis zu 50 Perioden gelöst werden. Alle Instanzen mit bis zu 20 Perioden erfüllten außerdem die Ganzzahligkeitsbedingung.
- Größe des letzten Master Problems: Je nach Problemgröße waren zwischen 40 und etwas mehr als 2000 Spalten zu erzeugen. Der prozentuale Anteil der erzeugten

¹⁹Vgl. *Bixby/Boyd* (1996).

²⁰Details sind *Drexel/Kimms* (1997) zu entnehmen.

Spalten, gemessen an der Anzahl möglicher Spalten, ging dabei mit wachsender Problemgröße dramatisch zurück. Die Spaltenerzeugung kann damit als sehr effizient bezeichnet werden.

- Rechenzeiten: Die erforderlichen CPU-Zeiten schwankten je nach Problemgröße zwischen Bruchteilen einer Sekunde und — von wenigen Ausnahmen abgesehen — mehreren Minuten.

Literatur

- [1] AIGBEDO, H., MONDEN, Y. "A parametric procedure for multicriterion sequence scheduling for just-in-time mixed-model assembly lines". *International Journal of Production Research*, 35:2543–2564, 1997.
- [2] BARD, J.F., SHTUB, A., JOSH, S.B. "Sequencing mixed-model assembly lines to level parts usage and minimize line length". *International Journal of Production Research*, 32:2431–2454, 1994.
- [3] BARNHART, C., JOHNSON, E.L., NEMHAUSER, G.L., SAVELSBERGH, M.W.P., VANCE, P.H. "Branch-and-price: column generation for huge integer programs". *Operations Research*, 46:316–329, 1998.
- [4] BENTON, W.C., SHIN, H. "Manufacturing planning and control: The evolution of MRP and JIT integration". *European Journal of Operational Research*, 110:411–440, 1998.
- [5] BERKLEY, B.J. "A review of the kanban production control research literature". *Production and Operations Management*, 1:393–411, 1992.
- [6] BITRAN, G.R., CHANG, L. "A mathematical programming approach to a deterministic Kanban system". *Management Science*, 33:427–441, 1987.
- [7] BIXBY, N., BOYD, E. *Using the CPLEX Callable Library*. CPLEX Optimization Inc., 7710–T Cherry Park, Houston, TX, 1996.
- [8] BRADLEY, S.P., HAX, A.C., MAGNANTI, T.L. *Applied Mathematical Programming*. Addison-Wesley, Reading, 1977.
- [9] DECKER, M. *Variantenfließfertigung*. Physica, Heidelberg, 1993.
- [10] DINCIBAS, M., SIMONIS, H., VAN HENTENRYCK, P. "Solving the car-sequencing problem in constraint logic programming". In *Proceedings of the European Conference on Artificial Intelligence (ECAI-88)*, S. 290–295. München, 1988.
- [11] DOMSCHKE, W., SCHOLL, A., VOSS, S. *Produktionsplanung — Ablauforganisatorische Aspekte*. Springer, Berlin, 2. Aufl., 1997.

- [12] DREXL, A., FLEISCHMANN, B., GÜNTHER, H.O., STADTLER, H., TEMPELMEIER, H. "Konzeptionelle Grundlagen kapazitätsorientierter PPS-Systeme". *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, 46:1022–1045, 1994.
- [13] DREXL, A., JORDAN, C. "Materialflußorientierte Produktionssteuerung bei Variantenfließfertigung". *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, 47:1073–1087, 1995.
- [14] DREXL, A., KIMMS, A. "Sequencing JIT mixed-model assembly lines under station-load and part-usage constraints". Manuskripte aus den Instituten für Betriebswirtschaftslehre der Universität Kiel, Nr. 460, 1997.
- [15] ENGEL, L., ZIMMERMANN, J., STEINHOFF, A. "Objectives for order-sequencing in automobile production". In DREXL, A., KIMMS, A., editor, *Beyond Manufacturing Resource Planning (MRP II) — Advanced Models and Methods for Production Planning*, S. 307–331. Springer, Berlin, 1998.
- [16] FANDEL, G., FRANCOIS, P. "Just-in-Time-Produktion und -Beschaffung — Funktionsweise, Einsatzvoraussetzungen und Grenzen". *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 59:531–544, 1989.
- [17] HOFMANN, CHR. "Planung der Investitions- und Beschaffungspolitik für JIT-Systeme". *Zeitschrift für Planung*, 8:127–148, 1997.
- [18] Inderfurth, K. "Zum Vergleich von Konzepten und Regeln zur Materialflußsteuerung in logistischen Ketten". *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 68:627–643, 1998.
- [19] INMAN, R.R., BULFIN, R.L. "Sequencing JIT mixed-model assembly lines". *Management Science*, 37:901–904, 1991.
- [20] KIM, Y.K., HYUN, C.J., KIM, Y. "Sequencing in mixed model assembly lines: a genetic algorithm approach". *Computers & Operations Research*, 23:1131–1145, 1996.
- [21] KNOLMAYER, G. "Materialflußorientierung statt Materialbestandsoptimierung: Ein Paradigmawechsel in der Theorie des Produktions-Managements?". In BAETGE, J. ET AL., editor, *Logistik — eine Aufgabe der Unternehmenspolitik*, S. 53–69. Gabler, Wiesbaden, 1987.
- [22] KRAJEWSKI, L.J., KING, B.E., RITZMAN, L.P., WONG, D.S. "Kanban, MRP, and shaping the manufacturing environment". *Management Science*, 33:39–57, 1987.
- [23] KUBIAK, W. "Minimizing variation of production rates in just-in-time systems: a survey". *European Journal of Operational Research*, 66:259–271, 1993.
- [24] KUBIAK, W., SETHI, S. "A note on 'Level schedules for mixed-model assembly lines in just-in-time production systems' ". *Management Science*, 37:121–122, 1991.

- [25] KUBIAK, W., STEINER, G., YEOMANS, J.S. "Optimal level schedules for mixed-model, multi-level just-in-time assembly systems". *Annals of Operations Research*, 69:241–259, 1997.
- [26] LOCHMANN, M. *Operative Planung und Steuerung von Mehrprodukt-Fließlinien*. Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden, 1999.
- [27] MILTENBURG, G.J. "Level schedules for mixed-model assembly lines in just-in-time production systems". *Management Science*, 35:192–207, 1989.
- [28] MILTENBURG, G.J., GOLDSTEIN, T. "Developing production schedules which balance part usage and smooth production loads for just-in-time production systems". *Naval Research Logistics*, 38:893–910, 1991.
- [29] MILTENBURG, G.J., SINNAMON, G. "Scheduling mixed-model multi-level just-in-time production systems". *International Journal of Production Research*, 37:1487–1509, 1989.
- [30] MILTENBURG, G.J., SINNAMON, G. "Algorithms for scheduling mixed-model just-in-time production systems". *IIE Transactions*, 24:121–130, 1992.
- [31] MILTENBURG, G.J., STEINER, G., YEOMANS, J.S. "A dynamic programming algorithm for scheduling mixed-model, just-in-time production systems". *Mathematical and Computer Modelling*, 13(3):57–66, 1990.
- [32] MONDEN, Y. *Toyota Production System — An Integrated Approach to Just-in-Time*. Chapman & Hall, Cheriton House/UK, 3. Aufl., 1998.
- [33] PARELLO, B.D. "CAR WARS: The (almost) birth of an expert system". *AI Expert*, 3:60–64, 1988.
- [34] PARELLO, B.D., KABAT, W.C., WOS, L. "Job-shop scheduling using automated reasoning: a case study of the car-sequencing problem". *Journal of Automated Reasoning*, 2:1–42, 1986.
- [35] RACHAMADUGU, R.M.V., YANO, C.A. "Analytical tools for assembly line design and sequencing". *IIE Transactions*, 26(2):2–10, 1994.
- [36] REESE, J. "Just-in-Time-Logistik — Ein umweltgerechtes Prinzip?". *ZfB-Ergänzungsheft*, 2/93:139–156, 1993.
- [37] ROSENBERG, O. "Stichwort 'Variantenfertigung' ". In KERN, W. et al., editor, *Handwörterbuch der Produktionswirtschaft*, Sp. 2119–2129. Poeschel, Stuttgart, 1996.
- [38] SCHNEEWEISS, C., SÖHNER, V. *Kapazitätsplanung bei moderner Fließfertigung*. Physica, Heidelberg, 1991.
- [39] SCHOLL, A. *Balancing and Sequencing of Assembly Lines*. Physica, Heidelberg, 1995.

- [40] SIMONS, J.V., SIMPSON, W.P. "An extension of multiple constraint scheduling as implemented in the Goal System (formerly DisasterTM)". *Production and Operations Management*, 6:3-22, 1997.
- [41] STEINER, G., YEOMANS, J.S. "A bicriterion objective for levelling the schedule of a mixed-model, JIT assembly process". *Mathematical and Computer Modelling*, 20(2):123-134, 1994.
- [42] STEINER, G., YEOMANS, J.S. "Optimal level schedules in mixed-model, multi-level JIT assembly systems with pegging". *European Journal of Operational Research*, 95:38-52, 1996.
- [43] SUMICHRAST, R.T., CLAYTON, E.R. "Evaluating sequences for paced, mixed-model assembly lines with JIT component fabrication". *International Journal of Production Research*, 34:3125-3143, 1996.
- [44] SUMICHRAST, R.T., RUSSELL, R.S., TAYLOR, B.W. "A comparative analysis of sequencing procedures for mixed-model assembly lines in a just-in-time production system". *International Journal of Production Research*, 30:199-214, 1992.
- [45] TSAI, L.-H. "Mixed-model sequencing to minimize utility work and the risk of conveyor stopping". *Management Science*, 41:485-495, 1995.
- [46] VAN ZANTE-DE FOKKERT, J.I., DE KOK, T.G. "The mixed and multi model line balancing problem: a comparison". *European Journal of Operational Research*, 100:399-412, 1997.
- [47] WIENDAHL, H.-P. "Belastungsorientierte Auftragsfreigabe". In KERN, W. et al., editor, *Handwörterbuch der Produktionswirtschaft*, Sp. 233-246. Schäffer-Poeschel, Stuttgart, 2. Aufl., 1996.
- [48] YANO, C.A., RACHAMADUGU, R.M.V. "Sequencing to minimize work overload in assembly lines with product options". *Management Science*, 37:572-586, 1991.
- [49] ZÄPFEL, G. "Produktionslogistik — Konzeptionelle Grundlagen und theoretische Fundierung". *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, 61:209-235, 1991.

Anhang: Herleitung des Subproblems & Pricing Out

Ausgangspunkt für die Herleitung des Subproblems, das zur Generierung weiterer Spalten dient, ist das primale Problem (9)–(13), das in (17)–(21) — versehen mit den zugehörigen Dualvariablen in Kästchen — wiedergegeben ist:

$$\min \sum_{v \in V} \sum_{k \in \mathcal{S}^v} c_k y_k \quad (17)$$

s. t.

$$\boxed{\lambda_v} \sum_{k \in \mathcal{S}^v} y_k = 1 \quad (v \in V) \quad (18)$$

$$\boxed{\mu_t} \sum_{v \in V} \sum_{i \in D_v} \sum_{k \in \mathcal{S}^v} b_{v,i,k,t} y_k = 1 \quad (t \in T) \quad (19)$$

$$\boxed{\pi_{o,t}} - \sum_{v \in V} \sum_{i \in D_v} \sum_{k \in \mathcal{S}^v} \sum_{\tau \in Q_{t,o}^+} a_{v,o} b_{v,i,k,\tau} y_k \geq -H_o \quad (o \in O, t \in T_o) \quad (20)$$

$$y_k \geq 0 \quad (v \in V, k \in \mathcal{S}^v) \quad (21)$$

Das zugehörige duale Problem — versehen mit den korrespondierenden primalen Variablen in Kästchen — sieht wie folgt aus:

$$\max \sum_{v \in V} \lambda_v + \sum_{t \in T} \mu_t - \sum_{o \in O} \sum_{t \in T_o} H_o \pi_{o,t} \quad (22)$$

s. t.

$$\boxed{y_k} \lambda_v + \sum_{i \in D_v} \sum_{t \in T} b_{v,i,k,t} \mu_t - \sum_{i \in D_v} \sum_{o \in O} \sum_{t \in T_o} \sum_{\tau \in Q_{t,o}^+} a_{v,o} b_{v,i,k,\tau} \pi_{o,t} \leq c_k \quad (v \in V, k \in \mathcal{S}^v) \quad (23)$$

$$\lambda_v \in \mathbb{R} \quad (v \in V)$$

$$\mu_t \in \mathbb{R} \quad (t \in T) \quad (24)$$

$$\pi_{o,t} \geq 0 \quad (o \in O, t \in T_o) \quad (25)$$

Gesucht ist also eine neue Spalte k des primalen Problems (= Zeile des dualen Problems), so daß für die aktuellen Werte der Dualvariablen

$$\lambda_v + \sum_{i \in D_v} \sum_{t \in T} b_{v,i,k,t} \mu_t - \sum_{i \in D_v} \sum_{o \in O} \sum_{t \in T_o} \sum_{\tau \in Q_{t,o}^+} a_{v,o} b_{v,i,k,\tau} \pi_{o,t} > c_k \quad (26)$$

bzw.

$$c_k - \lambda_v - \sum_{i \in D_v} \sum_{t \in T} b_{v,i,k,t} \mu_t + \sum_{i \in D_v} \sum_{o \in O} \sum_{t \in T} \sum_{\tau \in Q_{t,o}^-} a_{v,o} b_{v,i,k,t} \pi_{o,\tau} < 0 \quad (27)$$

gilt. Aus (27) ist abzuleiten, wie die Zielfunktion (16) und die darin verwendeten Pfeilbewertungen (15) zustande kommen.

Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind zwei praktisch und theoretisch bedeutsame Probleme, die bei just-in-time orientierter Variantenfließfertigung auftreten. Ein Problem besteht darin, den Teilebedarf in der Endmontage so konstant wie möglich zu halten ('Level Scheduling Problem'). Das zweite Problem versucht, die Belastung der Arbeitsstationen möglichst konstant zu halten ('Car Sequencing Problem'). In der vorliegenden Arbeit werden beide Probleme als kombiniertes ganzzahliges Optimierungsproblem formuliert. Die LP-Relaxation des Modells wird mit Hilfe der Methode der Spaltengenerierung gelöst. In einer experimentellen Studie zeigt sich, daß mit dieser Technik auch größere Instanzen näherungsweise optimal gelöst werden können.

Summary

This paper deals with two problems arising in sequencing mixed-model assembly lines. These problems are most important from both practical and theoretical standpoints. Mixed-model assembly lines have become core components of modern repetitive manufacturing, and just-in-time manufacturing in particular. One problem is to keep usage rate of all parts fed into the final assembly as constant as possible ('level scheduling problem') while the other is to keep the line's workstations loads as constant as possible ('car sequencing problem'). In this paper the combined problem is formulated as a single integer programming model. The LP-relaxation of this model is solved by column generation techniques. The results of an experimental evaluation show that the lower bounds are tight.