

Cremers, Heinz

**Working Paper**

## Konvergenz der binomialen Optionspreismodelle gegen das Modell von Black/Scholes/Merton

Arbeitsberichte der Hochschule für Bankwirtschaft, No. 26

**Provided in Cooperation with:**

Frankfurt School of Finance and Management

*Suggested Citation:* Cremers, Heinz (2000) : Konvergenz der binomialen Optionspreismodelle gegen das Modell von Black/Scholes/Merton, Arbeitsberichte der Hochschule für Bankwirtschaft, No. 26, Hochschule für Bankwirtschaft (HfB), Frankfurt a. M., <https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:101:1-20080707204>

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/27794>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

**Nr.26**

**Konvergenz der  
binomialen Optionspreismodelle  
gegen das Modell von  
Black/Scholes/Merton**

**Heinz Cremers**

Oktober 2000

ISSN 1436-9761

**Autor:** Prof.Dr.Heinz Cremers  
*Qualitative Methoden  
Und Spezielle Bankbetriebslehre*  
Hochschule für Bankwirtschaft,  
Frankfurt am Main  
EMail: cremers@hfb.de

**Herausgeber:** Hochschule für Bankwirtschaft  
Private Fachhochschule der BANKAKADEMIE  
Sternstraße 8 • 60318 Frankfurt/M.  
Tel.: 069/95946-16 • Fax: 069/95946-28

## Inhalt

1	Einleitung.....	1
2	Bewertung derivativer Produkte mit dem BSM-Modell.....	2
3	Bewertung derivativer Produkte mit dem Binomialmodell.....	5
4	Empirische Analyse.....	12
5	Konvergenz der Modelle.....	16
6	Konvergenz der Preise.....	18

## Anhang

<b>1</b>	<b>Verteilungen.....</b>	<b>20</b>
----------	--------------------------	-----------

Anhang 2	Schwache Konvergenz und zentraler Grenzwertsatz.....	23
----------	--	----

## Anhang 3 Beweis von Lemma

<b>6.1.....</b>	<b>27</b>
-----------------	-----------

Anhang 4	Beweis von Lemma 6.3.....	28
----------	---------------------------	----

## Anhang 5 Beweis von Lemma

<b>6.4.....</b>	<b>32</b>
-----------------	-----------

Literatur

Tabelle der  $N(0, 1)$ -Verteilung

## 1 Einleitung

**Stochastische Modellbildung.** Die Bewertung bestimmter derivativer Finanzprodukte verlangt eine stochastische Modellbildung der Preisentwicklung des zugrundeliegenden Basiswertes. Der faire Preis des Derivats ist dann nicht alleine von den aktuellen Marktinformationen abhängig, sondern wird wesentlich von der Wahl des stochastischen Modells mitbestimmt (Mark to Market and Model-Bewertung). Die meist verwendeten Modelle sind: Das kontinuierliche Modell von Black/Scholes/Merton (im folgenden kurz BSM-Modell) und das diskrete Binomialmodell von Cox/Ross/Rubinstein. Die vorliegende Arbeit zeigt verschiedene Varianten des Binomialmodells auf und weist für jedes dieser Modelle nach, daß bei feiner werdender Zerlegung des Laufzeitbereiches der faire Binomialpreis eines Derivats gegen den entsprechenden fairen BSM-Preis konvergiert. Grundlegend dabei ist die Einsicht, daß die Binomialmodelle im Sinne der schwachen Konvergenz zufälliger Größen gegen das BSM-Modell streben. Eine empirische Analyse versucht Einblicke in das Konvergenzverhalten zu geben.

**Voraussetzungen und Notationen.**  $F$  bezeichne ein Finanzprodukt (Basiswert), für das im Zeitpunkt  $t_0$  der Marktpreis  $S_0 = S(t_0, F)$  vorliegt.  $D$  ist ein Derivat von  $F$ , das im Zeitpunkt  $t_\ell > t_0$  zahlt und dessen fairer Preis  $S^*(t_0, D)$  zu bestimmen ist.  $r$  sei ein kontinuierlicher, laufzeitunabhängiger Marktzins mit dem Tageoperator  $T = Tg(t_0, t_\ell)$ ; insbesondere ist dann

$$zf = e^{rT} \quad \text{und} \quad df = e^{-rT}$$

der Zins- bzw. Diskontierungsfaktor für den Zeitraum  $(t_0, t_\ell)$ . Im Zeitpunkt  $t_0$  sei  $S_0^T = S_0 e^{cT}$  der Terminpreis des Basiswertes  $F$  mit Lieferung in  $t_\ell$ . Die kontinuierliche, annualisierte Haltekostenrate  $c$  enthält dabei sämtliche Zahlungen aus dem Produkt (Erträge) bzw. in das Produkt (Kosten) während der Laufzeit  $(t_0, t_\ell)$ .  $\sigma$  bezeichne die Standardabweichung der kontinuierlichen Jahresrendite von  $F$  (die sogenannte *Volatilität*). Der zugrundeliegende Markt ist reibungslos, d.h. es gibt weder Steuern noch Transaktionskosten; die Produkte sind beliebig teilbar, Leerverkäufe sind zugelassen und die Spanne zwischen Kaufpreis und Verkaufspreis ist null.

## 2 Bewertung derivativer Produkte mit dem BSM-Modell

**BSM-Modell.** Bezeichnen  $S_0 = S(t_0, F)$  und  $S_\ell = S(t_\ell, F)$  den Preis des Basiswertes  $F$  im Zeitpunkt  $t_0$  bzw.  $t_\ell$ , so berechnet sich die kontinuierliche Rendite  $R_\ell$  für den Zeitraum  $(t_0, t_\ell)$  nach

$$R_\ell = \ln \frac{S_\ell}{S_0} = \ln S_\ell - \ln S_0$$

Ist  $t_0 = \text{heute}$  und  $T = Tg(t_0, t_\ell)$  die zukünftige Zeitspanne gemessen in Jahren, so ist  $R_\ell$  eine zufällige Größe, für die wir eine Normalverteilung  $N(\mathbf{m}T, \mathbf{s}^2T)$  mit Jahresdrift  $\mathbf{m}$  und Volatilität  $\mathbf{s}$  voraussetzen. Der Preis

$$S_\ell = S_0 e^{R_\ell} = e^{\ln S_0 + R_\ell}$$

folgt dann dem Gesetz einer Lognormalverteilung mit den Parametern  $\ln S_0 + \mathbf{m}T$  und  $\mathbf{s}^2T$ . Erwartungswert und Varianz berechnen sich damit wie folgt ( $\rightarrow$  Anhang 1):

$$E(S_\ell) = S_0 e^{(\mathbf{m} + \mathbf{s}^2/2)T}$$

$$V(S_\ell) = S_0^2 e^{2\mathbf{m}T + \mathbf{s}^2T} (e^{\mathbf{s}^2T} - 1)$$

Der Ansatz der *risikoneutralen Bewertung* bestimmt den freien Parameter  $\mathbf{m}$  so, daß der Erwartungswert  $E(S_\ell)$  des zufälligen Preises  $S_\ell$  mit dem deterministisch berechenbaren Terminpreis übereinstimmt, d.h.

$$S_0 e^{(\mathbf{m} + \mathbf{s}^2/2)T} = S_0 e^{cT}$$

Dabei bezeichnet  $c$  die annualisierte kontinuierliche Haltekostenrate (Cost of Carry). Folglich ist

$$\left( \mathbf{m} + \frac{\mathbf{s}^2}{2} \right) T = cT \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m} = c - \frac{\mathbf{s}^2}{2}$$

Beachten wir noch, daß sich die  $N(\mathbf{m}T, \mathbf{s}^2T)$ -verteilte Rendite  $R$  in der Form  $\mathbf{m}T + \mathbf{s}\sqrt{T}Z$  mit einer  $N(0, 1)$ -verteilten »Störvariablen«  $Z$  schreiben läßt, so erhalten wir das BSM-Modell für den zukünftigen Preis des Basiswertes:

$$(2.1) \quad S_\ell = S_0 \exp \left( \left( c - \frac{\mathbf{s}^2}{2} \right) T + \mathbf{s}\sqrt{T}Z \right) \quad \text{mit} \quad L(Z) = N(0, 1)$$

Zusammenfassend halten wir fest: Im BSM-Modell folgt der Preis einer Lognormalverteilung

$$Q = \text{LN}(\ln S_0 + (c - \mathbf{s}^2/2)T, \mathbf{s}^2T)$$

d.h.  $S_\ell$  hat die kontinuierliche Dichte

$$f_{S_\ell}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\mathbf{p}\mathbf{s}}\sqrt{T}x} \exp\left(-\frac{(\ln(x/S_0) - (c - \mathbf{s}^2/2)T)^2}{2\mathbf{s}^2T}\right)$$

Für den Erwartungswert und die Varianz gilt

$$(2.2) \quad E_Q(S_\ell) = S_0 e^{cT}$$

$$(2.3) \quad V_Q(S_\ell) = e^{2\ln S_0 + 2(c - \mathbf{s}^2/2)T + \mathbf{s}^2T} (e^{\mathbf{s}^2T} - 1) = S_0^2 e^{2cT} (e^{\mathbf{s}^2T} - 1)$$

**Derivate.** Ist  $D$  ein derivatives Finanzprodukt zum Basiswert  $F$  mit der Auszahlung

$$CF(t_\ell, D) = h(S_\ell)$$

So bestimmt sich der faire Preis  $S^*(t_0, D)$  im BSM-Modell wie folgt:

$$(2.4) \quad S_{\text{BSM}}^*(t_0, D) = E_Q(h(S_\ell)) e^{-rT} = e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} h(x) f_{S_\ell}(x) dx$$

d.h. der faire Preis von  $D$  ist gleich dem diskontierten Erwartungswert der Auszahlung von  $D$  in  $t_\ell$ .

**Bemerkung.** Eine Begründung der Preisbestimmung (2.4) verlangt tieferliegende Begriffe und Methoden. Aus Sicht der Kapitalmarkttheorie sind die Begriffe »Arbitragefreiheit« und »Vollständigkeit« von Märkten und Modellen zu klären; aus mathematischer Sicht muß das statische Modell, das nur den Preis  $S_\ell$  im Zeitpunkt  $t_\ell$  beschreibt zu einem dynamischen Preisprozeß  $t \rightarrow S_t, t_0 \leq t \leq t_\ell$ , erweitert werden. Hier sind Martingalmethoden und der Begriff des stochastischen Integrals gefragt. Wir erwähnen noch, daß damit auch die Voraussetzungen der Einleitung verschärft werden müssen; insbesondere werden Zins und Volatilität als konstant in der Zeit angenommen.

**Optionen.** Wenden wir das Konzept der risikoneutralen Bewertung an auf europäische Optionen

$$h(S_\ell) = \begin{cases} \max(S_\ell - K, 0) & (\text{Call}) \\ \max(K - S_\ell, 0) & (\text{Put}) \end{cases}$$

so erhalten wir

$$S^*(t_0, \text{Option}) = \begin{cases} e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} \max(x - K, 0) f_{S_\ell}(x) dx & (\text{Call}) \\ e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} \max(K - x, 0) f_{S_\ell}(x) dx & (\text{Put}) \end{cases}$$

Die rechentechnische Auswertung der Integrale ( $\rightarrow$  Basiswissen Finanzmathematik) führt auf die BSM-Optionspreisformeln:

$$\text{Call } S_{\text{BSM}}^*(t_0, C) = S_0 e^{(c-r)T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$\text{Put } S_{\text{BSM}}^*(t_0, P) = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{(c-r)T} N(-d_1)$$

$$\text{mit } d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (c + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} \quad \text{und} \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

$N(x)$  = Verteilungsfunktion der  $N(0, 1)$ -Verteilung

Die Haltekosten  $c$  konkretisieren sich mit der Wahl des speziellen Basiswertes  $F$  der Option:

Haltekosten $c$	Basiswert $F$
$c = r$	Aktie ohne Dividendenzahlungen
$c = r - q$	Aktie mit kontinuierlicher Dividendenrate $q$
$c = r - r_f$	Devisen mit Auslandszinssatz $r_f$
$c = 0$	Terminprodukt und Bond; ersetze $S_0$ durch $S_0^T = S_0 e^{cT}$

### 3 Bewertung derivativer Produkte mit dem Binomialmodell

**Binomialmodell.** Das Binomialmodell ersetzt die kontinuierliche Verteilung des Preises  $S_\ell$  im BSM-Modell durch eine diskrete Verteilung. Dazu zerlegen wir die Laufzeit  $T = Tg(t_0, t_\ell)$  in  $n$  gleiche Teilintervalle der Länge  $\Delta t = T/n$  ( $\rightarrow$  Bild 1). Setzen wir  $t_k = t_0 + k \cdot \Delta t$  und  $S_k = S(t_k, F)$  für  $k = 0, 1, \dots, n$  (beachte:  $t_n = t_\ell$  und  $S_n = S_\ell$ ), so entwickelt sich der Preis innerhalb eines jeden Teilintervalls  $\Delta t$  nur um eine bestimmte Rate nach oben oder nach unten:

$$S_{k+1} = S_k u \quad \text{oder} \quad S_{k+1} = S_k d$$

Dabei sind  $u > 1$  (für »up«) und  $0 < d < 1$  (für »down«) feste, zeitunabhängige Multiplikatoren.  $p$  sei die Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung und entsprechend  $1 - p$  die Wahrscheinlichkeit einer Abwärtsbewegung ( $\rightarrow$  Bild 2).

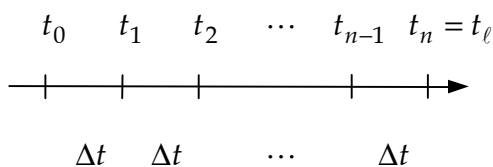


Bild 1

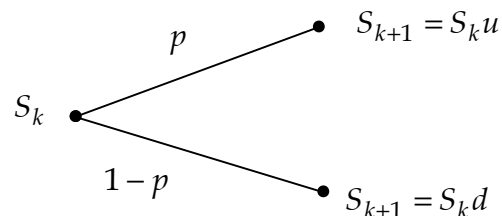


Bild 2

Startet der Preis im Zeitpunkt  $t_0$  in  $S_0$ , so gibt jede Folge  $(S_1, \dots, S_n)$  bestehend aus up's und down's einen konkreten Preisverlauf an. Ist etwa  $n = 4$  und  $(S_1, S_2, S_3, S_4) = (\text{up}, \text{down}, \text{up}, \text{up})$ , so beschreibt der zugehörige Preis in den Zeitpunkten  $(t_0, t_1, t_2, t_3)$  die Bewegung:  $S_0, S_1 = S_0 u, S_2 = S_0 u d, S_3 = S_0 u^2 d, S_4 = S_0 u^3 d$ . Die Gesamtheit der möglichen Preisverläufe ist in Bild 3 dargestellt. Die spezielle Baumstruktur wird *rekombinierend* genannt: Wegen  $S_0 u d = S_0 d u$  ist das Preisresultat einer Aufwärtsbewegung gefolgt von einer Abwärtsbewegung gleich dem Resultat bei umgekehrter Reihenfolge.

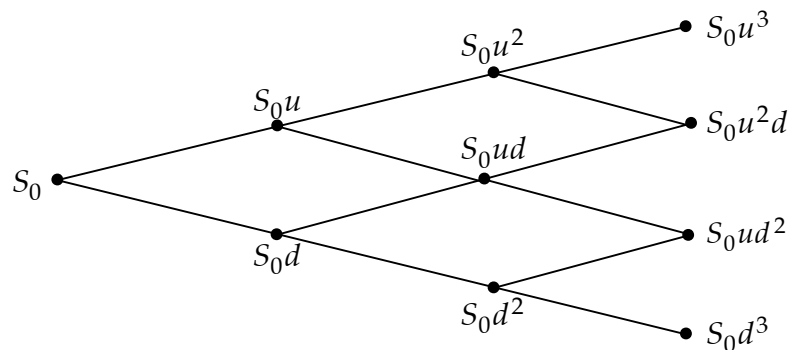


Bild 3



Der Preis  $S_n$  im Zeitpunkt  $t_n = t_\ell$  ist damit eine zufällige Größe der Form

$$S_n = S_0 \cdot Y_1 \cdot \dots \cdot Y_n$$

mit unabhängigen, identisch zweipunktverteilten Zufallsvariablen  $Y_1, \dots, Y_n$ ; genauer:  $L(Y_k) = ZP(u, d, p)$  für  $k=1, \dots, n$  ( $\rightarrow$  Anhang 1). Da jedes  $Y_k$  darstellbar ist durch

$$Y_k = u^{I_k} d^{1-I_k}$$

mit einer  $ZP(1, 0, p)$ -verteilten Zufallsvariablen  $I_k$  und die  $n$ -fache Summe unabhängiger  $ZP(1, 0, p)$ -verteilter Zufallsvariablen binomialverteilt ist ( $\rightarrow$  Anhang 1), gilt für den Preis  $S_n$

$$(3.1) \quad S_n = S_0 u^{B_n} d^{n-B_n} \quad \text{mit} \quad L(B_n) = L\left(\sum_{k=1}^n I_k\right) = B(n, p)$$

Damit berechnen sich die Wahrscheinlichkeiten zu

$$P(S_n = S_0 u^k d^{n-k}) = P(B_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Zusammenfassend halten wir fest: Im Binomialmodell folgt der Preis einer transformierten Binomialverteilung  $Q_n$  mit der diskreten Dichte

$$f_{S_n}(x_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{mit} \quad x_k = S_0 u^k d^{n-k} \quad \text{und} \quad k=0, 1, \dots, n$$

Für den Erwartungswert und die Varianz gilt

$$(3.2) \quad E_{Q_n}(S_n) = S_0 (pu + (1-p)d)^n$$

$$(3.3) \quad V_{Q_n}(S_n) = S_0^2 ((pu^2 + (1-p)d^2)^n - (pu + (1-p)d)^{2n})$$

Ist speziell  $d = 1/u$  so schreibt sich (3.1) wie folgt:

$$(3.4) \quad S_n = S_0 u^{B_n} u^{-(n-B_n)} = S_0 u^{2B_n - n}$$

**Drei Modellvarianten.** Durch Spezifikation der Modellparameter  $u$ ,  $d$  und  $p$  ergibt sich ein konkretes Binomialmodell. Wir betrachten im folgenden die Modelle:

Modell	$u$	$d$	$P$
1	$e^{\mathbf{m}\Delta t + \mathbf{s}\sqrt{\Delta t}}$	$e^{\mathbf{m}\Delta t - \mathbf{s}\sqrt{\Delta t}}$	$\frac{1}{2}$
2	$e^{\mathbf{s}\sqrt{\Delta t}}$	$e^{-\mathbf{s}\sqrt{\Delta t}}$	$\frac{\mathbf{m}\Delta t - \ln d}{\ln u - \ln d}$
3	$e^{\mathbf{s}\sqrt{\Delta t}}$	$e^{-\mathbf{s}\sqrt{\Delta t}}$	$\frac{e^{c\Delta t} - d}{u - d}$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{s}$  wieder die Volatilität des Basiswertes  $F$  und  $\mathbf{m} = c - \mathbf{s}^2/2$  die Drift der risikoneutralen Bewertung. In den Abschnitten 5 und 6 werden wir zeigen: Für jedes der Modelle 1-3 gilt

$$S_n \Rightarrow S_\ell, \quad E_{Q_n}(S_n) \rightarrow E_Q(S_\ell) \quad \text{und} \quad V_{Q_n}(S_n) \rightarrow V_Q(S_\ell)$$

bei immer feiner werdender Zerlegung des Zeitintervalls. In diesem Sinne sind alle drei Binomialmodelle Approximationen des BSM-Modells. Bevor wir die drei Varianten näher charakterisieren, stellen wir noch fest: Für die Modelle 2 und 3 gilt  $ud = 1$ , d.h. eine Aufwärtsbewegung gefolgt von einer Abwärtsbewegung erzielt den Startpreis.

**Modell 1.** Für die kontinuierliche Rendite  $R_n$  gilt

$$\begin{aligned} R_n &= \ln(S_n/S_0) = B_n \ln u + (n - B_n) \ln d \\ &= B_n(\mathbf{m}\Delta t + \mathbf{s}\sqrt{\Delta t}) + (n - B_n)(\mathbf{m}\Delta t - \mathbf{s}\sqrt{\Delta t}) \\ &= n\mathbf{m}\Delta t + (2B_n - n)\mathbf{s}\sqrt{\Delta t} \\ &= \mathbf{m}T + \mathbf{s}\sqrt{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Z_k \end{aligned}$$

wobei  $Z_1, \dots, Z_n$  unabhängige identisch  $\mathbf{ZP}(1, -1, 1/2)$ -verteilte Zufallsvariablen sind ( $\rightarrow$  Anhang 1) mit  $E(Z_k) = 0$  und  $V(Z_k) = 1$ . Mit dem Zentralen Grenzwertsatz ( $\rightarrow$  Anhang 2, Korollar A.2.7 und Satz A.2.3) gilt:

- $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Z_k \Rightarrow Z$  mit  $L(Z) = N(0, 1)$  und damit  $R_n \Rightarrow R_\ell$
- $E_{Q_n}(R_n) = \mathbf{m}T = E_Q(R_\ell)$
- $V_{Q_n}(R_n) = \mathbf{s}^2 T = V_Q(R_\ell)$

In diesem Sinne ist die Rendite  $R_n$  die diskrete Version der Rendite  $R_\ell$  im BSM-Modell. Die »Störvariable«  $\sum_{k=1}^n Z_k$  ist die klassische Form eines Random Walks, der

sich in jedem Zeitschritt mit gleicher Wahrscheinlichkeit um 1 nach oben bzw. nach unten bewegt.

**Bemerkung.** Stellen wir umgekehrt die Frage nach dem Binomialmodell, dessen Parameter  $u$ ,  $d$  und  $p$  die Bedingungen

$$E_{Q_n}(R_n) = m\bar{T}, \quad V_{Q_n}(R_n) = s^2 T \quad \text{und} \quad p = 1/2$$

erfüllt, so ist Modell 1 die Lösung ( $\rightarrow$  Basiswissen Finanzmathematik).

**Modell 2.** Wir betrachten wieder die kontinuierliche Rendite  $R_n$  und beachten  $d = 1/u$  für dieses Modell:

$$R_n = \ln(S_n/S_0) = (2B_n - n)\ln u = (2B_n - n)s\sqrt{\Delta t}$$

Für die Wahrscheinlichkeit  $p$  gilt

$$p = \frac{m\Delta t + s\sqrt{\Delta t}}{2s\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{m\Delta t}{s\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{m\bar{T}}{s\sqrt{T}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty$$

und folglich für den Erwartungswert und die Varianz

- $E_{Q_n}(R_n) = (2pn - n)s\sqrt{\Delta t} = m\Delta t \cdot n = m\bar{T} = E_Q(R_\ell)$
- $V_{Q_n}(R_n) = 4V_{Q_n}(B_n)s^2\Delta t = 4np(1-p)s^2\Delta t \rightarrow s^2 T = V_Q(R_\ell)$

**Bemerkung.** Stellen wir umgekehrt die Frage nach dem Binomialmodell, dessen Parameter  $u$ ,  $d$  und  $p$  die Bedingungen

$$E_{Q_n}(R_n) = m\bar{T}, \quad V_{Q_n}(R_n) = s^2 T \quad \text{und} \quad d = 1/u$$

erfüllen, so ist

$$u = e^{\sqrt{s^2\Delta t + m^2\Delta t^2}} \approx e^{s\sqrt{\Delta t}} \quad d = e^{-\sqrt{s^2\Delta t + m^2\Delta t^2}} \approx e^{-s\sqrt{\Delta t}} \quad p = \frac{m\Delta t - \ln d}{\ln u - \ln d}$$

die Lösung ( $\rightarrow$  Basiswissen Finanzmathematik und  $\rightarrow$  Cox/Rubinstein). Dies ist - zumindest approximativ - Modell 2.

**Modell 3.** Wir betrachten nun den Preis  $S_n$  des Basiswertes  $F$  und stellen fest, daß Modell 3 als einzige Version der Forderung der risikoneutralen Bewertung genügt:

$$E_{Q_n}(S_n) = S_0 \cdot \prod_{k=1}^n E_{Q_n}(Y_k) = S_0 (pu + (1-p)d)^n = S_0 (e^{c\Delta t})^n = S_0 e^{cT}$$

Damit ist die Folge

$$S_k^\circ = S_k \cdot e^{-c\Delta t \cdot k} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n$$

der abgezinsten Preise ein Martingal ( $\rightarrow$  Anhang 3); denn wegen der Unabhängigkeit des  $k+1$ -ten Entwicklungsschrittes von der vorhergehenden Entwicklung gilt für  $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} E_{Q_n}(S_{k+1}^\circ | S_1^\circ, \dots, S_k^\circ) &= E_{Q_n}(S_k^\circ Y_{k+1} e^{-c\Delta t} | S_1^\circ, \dots, S_k^\circ) \\ &= S_k^\circ E_{Q_n}(Y_{k+1}) e^{-c\Delta t} = S_k^\circ e^{c\Delta t} e^{-c\Delta t} = S_k^\circ \end{aligned}$$

Bemerkung. Stellen wir wieder die Frage nach dem Binomialmodell, dessen Parameter  $u$ ,  $d$  und  $p$  die Bedingungen

$$E_{Q_n}(S_n) = S_0 e^{cT}, \quad V_{Q_n}(S_n) = S_0^2 e^{2cT} (e^{s^2 T} - 1) \quad \text{und} \quad d = 1/u$$

erfüllen, so ist

$$\begin{aligned} u &= \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1} \approx e^{s\sqrt{\Delta t}} \quad \text{mit} \quad a = e^{-c\Delta t} + e^{c\Delta t + s^2 \Delta t} \\ d &= \frac{1}{u} \approx e^{-s\sqrt{\Delta t}} \quad \text{und} \quad p = \frac{e^{c\Delta t} - d}{u - d} \end{aligned}$$

die Lösung ( $\rightarrow$  Basiswissen Finanzmathematik).

**Derivate.** Ist  $D$  ein derivatives Finanzprodukt zum Basiswert  $F$  mit der Auszahlung

$$CF(t_n, D) = h(S_n)$$

so bestimmt sich der faire Preis  $S^*(t_0, D)$  im Binomialmodell wie folgt:

$$(3.5) \quad S_{\text{BM},n}^*(t_0, D) = E_{Q_n}(h(S_n)) e^{-rT} = e^{-rT} \sum_{k=1}^n h(x_k) f_{S_n}(x_k)$$

d.h. der faire Preis von  $D$  ist gleich dem diskontierten Erwartungswert der Auszahlung von  $D$  in  $t_n$ .

Bemerkung. Auch im Binomialmodell ist die Preisbestimmung (3.5) zu begründen. Einzig Modell 3 erlaubt eine Kapitalmarkt-theoretische Begründung: Mit der Martingaleigenschaft der Preisentwicklung  $S_0^\circ, S_1^\circ, \dots, S_n^\circ$  hat auch die Preisentwicklung einer selbstfinanzierenden Duplikationsstrategie zum Derivat  $D$  diese Eigenschaft. Da Martingale konstante Erwartungswerte haben, folgt (3.5).

Für alle drei Modelle wird unter einschränkenden Bedingungen an die Auszahlungsfunktion  $h$  in Abschnitt 6 gezeigt:

$$E_{Q_n}(h(S_n)) \rightarrow E_{Q_\ell}(h(S_\ell)) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

d.h. die fairen Preise im jeweiligen Binomialmodell konvergieren bei feiner werdender Unterteilung des Zeitintervalls gegen den fairen Preis im BSM-Modell. Diese mathematische Beziehung stellt also für die Modelle 1 und 2 die einzige Begründung dar. Ihre Kapitalmarkt-theoretische Rechtfertigung erhalten diese Modelle somit nur durch das BSM-Modell.

**Optionen.** Wenden wir die Preisbestimmung (3.5) an auf europäische Optionen

$$h(S_n) = \begin{cases} e^{-rT} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max(S_0 u^k d^{n-k} - K, 0), & \text{(Call)} \\ e^{-rT} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max(K - S_0 u^k d^{n-k}, 0), & \text{(Put)} \end{cases}$$

so erhalten wir

$$(3.6) \quad S_{\text{BM},n}^*(t_0, \text{Option}) = \begin{cases} e^{-rT} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max(S_0 u^k d^{n-k} - K, 0) & \text{(Call)} \\ e^{-rT} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max(K - S_0 u^k d^{n-k}, 0) & \text{(Put)} \end{cases}$$

**Spezialfall.** Liegt Modell 3 mit  $c = r$  vor, d.h. die Haltekosten sind mit den reinen Refinanzierungskosten identisch, kann die Preisformel (3.6) noch weiter ausgewertet werden. Wir bemerken zunächst, daß für den vorliegenden Spezialfall die Pseudowahrscheinlichkeit

$$p_0 = p u e^{-r\Delta t}$$

die Eigenschaft

$$1 - p_0 = (1 - p) d e^{-r\Delta t}$$

hat (beachte:  $(p u + (1 - p) d) e^{-r\Delta t} = 1$ ). Weiter gilt für den Call (und analog für den Put)

$$\begin{aligned}
S_0 u^k d^{n-k} \geq K &\Leftrightarrow \left(\frac{u}{d}\right)^k \geq \frac{K}{S_0} d^{-n} \\
&\Leftrightarrow k \ln\left(\frac{u}{d}\right) \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - n \ln d \\
&\Leftrightarrow k \geq \frac{\ln(K/S_0) - n \ln d}{\ln(u/d)} \\
&\Leftrightarrow k \geq k_0 = \min\left(i : i \geq \frac{\ln(K/S_0) - n \ln d}{\ln(u/d)}\right)
\end{aligned}$$

Mit den Verteilungsfunktionen  $B_0$  und  $B$  zu den Binomialverteilungen  $\mathbf{B}(n, p_0)$  bzw.  $\mathbf{B}(n, p)$  ( $\rightarrow$  Anhang 1) folgt weiter:

$$\begin{aligned}
S_{\text{BM3},n}^*(t_0, C) &= e^{-rT} \sum_{k=k_0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} (S_0 u^k d^{n-k} - K) \\
&= S_0 \sum_{k=k_0}^n \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} - K e^{-rT} \sum_{k=k_0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= S_0 (1 - B_0(k_0)) - K e^{-rT} (1 - B(k_0))
\end{aligned}$$

Analog gilt für den Put

$$\begin{aligned}
S_{\text{BM3},n}^*(t_0, P) &= K e^{-rT} \sum_{k=0}^{k_0-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - S_0 \sum_{k=0}^{k_0-1} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} \\
&= K e^{-rT} B(k_0) - S_0 B_0(k_0)
\end{aligned}$$

Bei dieser Form der Preisbestimmung im Binomialmodell wird die Analogie zu den Bewertungsformeln des BSM-Modells besonders deutlich. In Abschnitt 6 zeigen wir mit elementaren Methoden, daß bei feiner werdender Zerlegung des Teilintervalls gilt

$$S_{\text{BM3},n}^*(t_0, C) \rightarrow S_{\text{BSM}}^*(t_0, C) \quad \text{und} \quad S_{\text{BM3},n}^*(t_0, P) \rightarrow S_{\text{BSM}}^*(t_0, P)$$

## 4 Empirische Analyse

**Berechnung des Optionspreises im Binomialmodell.** Zur Berechnung des Optionspreises bieten sich zwei Verfahren an:

**1. Iteration.** Während der Binomialbaum durch Vorwärtsiteration bestimmt wird, ergibt sich der Optionspreis durch iteratives Rückwärtsrechnen.

$$\text{Vorwärtsiteration: } S_{k+1} = \begin{cases} S_k u & \text{für up} \\ S_k d & \text{für down} \end{cases}$$

Rückwärtsiteration: Mit den Notationen  $C_{k,i}$  und  $P_{k,i}$  für den Callpreis bzw. Putpreis im Zeitpunkt  $t_k$  bei  $i$  Aufwärtsbewegungen und entsprechend  $S_{k,i}$  für den Preis des Basiswertes – also  $S_{k,i} = S_0 u^i d^{k-i}$  – gilt

$$\begin{aligned} C_{n,i} &= \max(S_{n,i} - K, 0) & \text{und} & & C_{k,i} &= [C_{k+1,i+1}p + C_{k+1,i}(1-p)]e^{-r\Delta t} & \text{für } k < n \\ P_{n,i} &= \max(K - S_{n,i}, 0) & \text{und} & & P_{k,i} &= [P_{k+1,i+1}p + P_{k+1,i}(1-p)]e^{-r\Delta t} & \text{für } k < n \end{aligned}$$

**2. Erwartungswert.** Gemäß Formel (3.6) werden die zustandsabhängigen Auszahlungen der Option mit den Binomialwahrscheinlichkeiten gewichtet und dann aufsummiert. Diskontieren des Erwartungswertes ergibt dann den Optionspreis.

**Aktien.** Eine Aktie A ohne Dividendenzahlungen notiert in  $t_0$  mit dem Preis 100 GE. Zu bewerten ist ein europäischer Call C auf A mit Basispreis 105 GE und Verfall in 3 Monaten. Der kontinuierliche Zins für 3 Monate beträgt 10%; die Aktie besitzt eine Volatilität von 40%. Also  $S_0 = 100$ ;  $K = 105$ ;  $T = 0,25$ ;  $b = r = 0,1$  und  $\sigma = 0,4$ . Wir bestimmen den Callpreis durch ein Binomialmodell mit  $n = 3$  Schritten (um den Rechenaufwand überschaubar zu halten). Mit  $\Delta t = 0,25/3 = 1/12$  berechnen wir die Parameter des dritten Modells:

$$\begin{aligned} u &= e^{0,4\sqrt{1/12}} = 1,1224 & \text{und} & & d &= \frac{1}{u} = 0,8909 \\ p &= \frac{e^{0,1/12} - 0,8909}{1,1224 - 0,8909} = 0,5073 & \text{und} & & 1-p &= 0,4927 \end{aligned}$$

Mit diesen Angaben kann der Binomialbaum konstruiert werden ( $\rightarrow$  Bild 1).

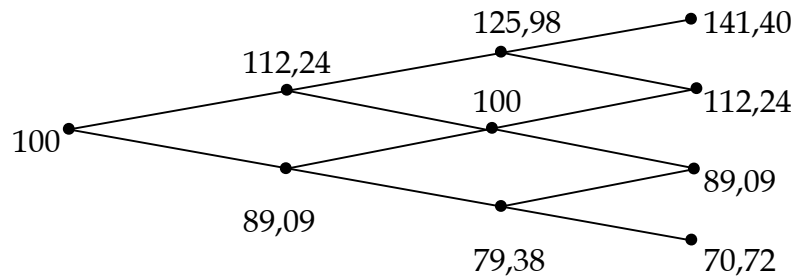


Bild 1

1. Lösungsverfahren (Iteration). Beginnend mit den Callpreisen im Zeitpunkt  $t_3$  werden diese iterativ rückwärts gerechnet, z.B.

$$C_{3,3} = \max(141,40 - 105, 0) = 36,40$$

$$C_{2,2} = [36,40p + 7,24(1-p)] e^{-r\Delta t} = (36,40 \cdot 0,5073 + 7,24 \cdot 0,4927) e^{-0,1/12} = 21,85$$

Aktien- preis	Call			
	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$
141,40				36,40
125,98			21,85	
112,24		12,77		7,24
100,00	7,32		3,64	
89,09		1,83		0
79,38			0	
70,72				0

Der Faire Callpreis ist damit  $S_{\text{BM}3,3}^*(t_0, C) = 7,32$  GE.

2. Lösungsverfahren (Erwartungswert). Die Erwartungswertbildung ist in der folgenden Tabelle aufgearbeitet:

$i$	$S_{3,i} = S_0 u^i d^{3-i}$	$C_{3,i} = \max(S_{3,i} - 105, 0)$	$p_i = \binom{3}{i} p^i (1-p)^{3-i}$	$C_{3,i} \cdot p_i$
0	70,72	0	0,1196	0
1	89,09	0	0,3694	0
2	112,24	7,24	0,3804	2,75
3	141,40	36,40	0,1306	4,75
Summe			1,0000	7,50

Der Faire Callpreis ergibt sich durch Abzinsen des Erwartungswertes in  $t_\ell$  auf den Zeitpunkt  $t_0$ :



$$S_{\text{BM3},3}^*(t_0, C) = E_{Q_3}(CF(t_\ell, C)) \cdot e^{-rT} = 7,50 \cdot e^{-0,1 \cdot 0,25} = 7,32 \text{ GE}$$

Abschließend vergleichen wir dieses Resultat mit dem exakten Ergebnis aus dem BSM-Modell. Zunächst bestimmen wir

$$d_1 = \frac{\ln(100/105) + (0,1 + 0,4^2/2) \cdot 0,25}{0,4 \cdot \sqrt{0,25}} = -0,0190$$

$$d_2 = d_1 - 0,4 \cdot \sqrt{0,25} = -0,2190$$

und damit weiter

$$\begin{aligned} S_{\text{BSM}}^*(t_0, C) &= 100N(-0,0190) + e^{-0,1 \cdot 0,25} N(-0,2190) \\ &= 100(1 - 0,5080) - 105e^{-0,1 \cdot 0,25} \cdot (1 - 0,5871) = 6,9144 \text{ GE} \end{aligned}$$

Analog folgt für den Put

$$S_{\text{BSM}}^*(t_0, P) = 9,3220 \text{ GE}$$

Die folgende Tabelle zeigt das Konvergenzverhalten der drei Binomialmodelle:

$n$	Modell 1		Modell 2		Modell 3	
	Call	Put	Call	Put	Call	Put
3	7,3776	9,7896	7,3180	9,7326	7,3214	9,7289
5	7,1134	5,5236	7,0593	9,4711	7,0613	9,4689
10	7,0660	9,4748	7,0804	9,4901	7,0815	9,4890
20	7,0100	9,4182	7,0070	9,4156	7,0076	9,4151
30	6,9731	9,3811	6,9624	9,3706	6,9627	9,3702
50	6,9288	9,3366	6,9101	9,3181	6,9103	9,3179
100	6,9072	9,3148	6,9205	9,3282	6,9206	9,3281
200	6,9238	9,3314	6,9198	9,3274	6,9198	9,3274
300	6,9125	9,3200	6,9127	9,3203	6,9127	9,3203
500	6,9182	9,3257	6,9165	9,3241	6,9166	9,3241
1000	6,9163	9,3239	6,9143	9,3219	6,9143	9,3218

**Devisen.** Sei  $S_0 = S(t_0, 1\text{GE}_f)$  der Preis für eine Geldeinheit der Auslandswährung zahlbar in Geldeinheiten GE der Inlandswährung (Preisnotierung).  $R$  bezeichne den Inlandszins und  $r_f$  den Auslandszins. Zur Bewertung europäischer Devisenoptionen erhalten wir mit  $b = r - r_f$  die Optionspreisformeln des BSM-Modells

$$\text{Call } S_{\text{BSM}}^*(t_0, C) = S_0 e^{-r_f T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$\text{Put } S_{\text{BSM}}^*(t_0, P) = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} N(-d_1)$$

$$\text{mit } d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - r_f + \mathbf{s}^2/2)T}{\mathbf{s}\sqrt{T}} \quad \text{und} \quad d_2 = d_1 - \mathbf{s}\sqrt{T}$$

Beispiel. Betrachte eine europäische Call Fremdwährung / Put Euro Option mit 6 Monaten Laufzeit und Strike 83. Der Preis für eine Einheit Fremdwährung ist im Bewertungszeitpunkt mit 85 Euro festgelegt bei einer Volatilität von 10,3%. Der 6-Monatszins des Inlands ist 3%, der des Auslands 5%. Also  $S_0 = 85$ ;  $K = 83$ ;  $T = 0,5$ ;  $r = 0,03$ ;  $r_f = 0,05$  und  $\mathbf{s} = 0,103$ . Wir berechnen zunächst

$$d_1 = \frac{\ln(85/83) + (0,03 - 0,05 + 1,103^2/2) \cdot 0,5}{0,103 \cdot \sqrt{0,5}} = 0,2260$$

$$d_2 = d_1 - 0,103 \cdot \sqrt{0,5} = 0,1532$$

Damit gilt weiter

$$S_{\text{BSM}}^*(t_0, C) = 85e^{-0,025} \cdot 0,5894 - 83e^{-0,015} \cdot 0,5609 = 3,0031 \text{ GE}$$

Für den entsprechender Put Fremdwährung / Call Euro gilt  $S_{\text{BSM}}^*(t_0, P) = 1,8660 \text{ GE}$ . Die folgende Tabelle zeigt das Konvergenzverhalten der drei Binomialmodelle:

$n$	Modell 1		Modell 2		Modell 3	
	Call	Put	Call	Put	Call	Put
3	3,1799	2,0429	3,0634	1,9280	3,0644	1,9273
5	3,0973	1,9603	2,9878	1,8517	2,9884	1,8513
10	3,0287	1,8917	3,0573	1,9208	3,0576	1,9206
20	3,0261	1,8891	3,0179	1,8811	3,0181	1,8810
30	3,0215	1,8844	2,9967	1,8598	2,9968	1,8597
50	3,0147	1,8776	3,0025	1,8656	3,0026	1,8655
100	3,0057	1,8686	3,0076	1,8706	3,0077	1,8706
200	3,0019	1,8649	3,0049	1,8679	3,0049	1,8679
300	3,0046	1,8675	3,0032	1,8661	3,0032	1,8661
500	3,0038	1,8668	3,0039	1,8669	3,0039	1,8669
1000	3,0036	1,8666	3,0031	1,8661	3,0031	1,8661

## 5 Konvergenz der Modelle

**Satz.** In allen drei Varianten des Binomialmodells konvergiert der Preis  $S_n$  im Sinne der schwachen Konvergenz ( $\rightarrow$  Anhang 3) gegen den Preis  $S_\ell$  des BSM-Modells; in Zeichen  $S_n \Rightarrow S_\ell$ ; d.h. es gilt

$$E_{Q_n}(g(S_n)) \rightarrow E_Q(g(S_\ell))$$

für jede stetige, beschränkte Funktion  $x \rightarrow g(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Beweis. Wir werden in folgenden für jedes Modell nachweisen, daß die Logarithmen der Preise schwach konvergieren, d.h.

$$\ln S_n \Rightarrow \ln S_\ell = \ln S_0 + \mathbf{m}T + \mathbf{s}\sqrt{T}Z$$

mit  $L(Z) = N(0, 1)$  und  $\mathbf{m} = c - \mathbf{s}^2/2$ . Da  $x \rightarrow e^x$  eine stetige Funktion ist, folgt dann die Behauptung  $S_n \Rightarrow S_\ell$  mit Satz A.2.2 des Anhangs 2.

**Modell 1.** Wir verwenden den zentralen Grenzwertsatz in der Form A.2.8 mit  $p = 1/2$ . Mit (3.1) gilt

$$\begin{aligned} \ln S_n &= \ln S_0 + B_n \ln u + (n - B_n) \ln d = \ln S_0 + n\mathbf{m}\Delta t + \mathbf{s}\sqrt{\Delta t}(2B_n - n) \\ &= \ln S_0 + \mathbf{m}T + \mathbf{s}\sqrt{T} \frac{2B_n - n}{\sqrt{n}} = \ln S_0 + \mathbf{m}T + \mathbf{s}\sqrt{T} \frac{B_n - n/2}{\sqrt{n/4}} \\ &\Rightarrow \ln S_0 + \mathbf{m}T + \mathbf{s}\sqrt{T}Z \quad \text{mit } L(Z) = N(0, 1) \end{aligned}$$

**Modell 2 und 3.** Wir beachten zunächst  $\ln u = -\ln d = \mathbf{s}\sqrt{\Delta t}$  und folgern für Modell 2:

- $p = p_n = \frac{\mathbf{m}\Delta t + \mathbf{s}\sqrt{\Delta t}}{2\mathbf{s}\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{m}\Delta t}{\mathbf{s}\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{m}T}{\mathbf{s}\sqrt{T}\sqrt{n}} \rightarrow \frac{1}{2}$  für  $n \rightarrow \infty$
- $(2pn - n) \ln u = \sqrt{n}(2p - 1)\mathbf{s}\sqrt{T} = \frac{\mathbf{m}T}{\mathbf{s}\sqrt{T}} \mathbf{s}\sqrt{T} = \mathbf{m}T$

In Anhang 4 wird gezeigt, daß analog für Modell 3 gilt:

- $p = p_n \rightarrow \frac{1}{2}$  für  $n \rightarrow \infty$
- $(2pn - n) \ln u = \sqrt{n}(2p - 1)\mathbf{s}\sqrt{T} \rightarrow \frac{\mathbf{m}T}{\mathbf{s}\sqrt{T}} \mathbf{s}\sqrt{T} = \mathbf{m}T$

Dann schließen wir weiter mit dem zentralen Grenzwertsatz A.2.6, A.2.3 und (3.4):

$$\begin{aligned}
\ln S_n &= \ln S_0 + (2B_n - n) \ln u \\
&= \ln S_0 + \sqrt{n}(2p-1)\mathbf{s} \sqrt{T} + \sqrt{4p(1-p)}\mathbf{s}^2 T \cdot \frac{(2B_n - n) \ln u - (2pn - n) \ln u}{\sqrt{4np(1-p)}(\ln u)^2} \\
&= \ln S_0 + \sqrt{n}(2p-1)\mathbf{s} \sqrt{T} + \mathbf{s} \sqrt{T} \sqrt{4p(1-p)} \cdot \frac{B_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \\
&\Rightarrow \ln S_0 + \mathbf{m}T + \mathbf{s} \sqrt{T} Z \quad \text{mit} \quad L(Z) = N(0,1)
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

## 6 Konvergenz der Optionspreise

**Modelle 1 bis 3.** Aus der schwachen Konvergenz  $S_n \Rightarrow S_\ell$  der Preise des Basiswertes kann nicht auf die Konvergenz

$$(6.1) \quad E_{Q_n}(h(S_n))e^{-rT} \rightarrow E_Q(h(S_\ell))e^{-rT}$$

der Preise eines derivativen Finanzprodukts  $D$  mit Auszahlung

$$CF(t_\ell, D) = h(S_\ell)$$

geschlossen werden, da i.a.  $h$  weder beschränkt noch stetig ist. Der folgende Satz enthält hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit von (6.1).

**6.1 Satz.** Erfüllt die Auszahlungsfunktion  $h$  eines Derivats die folgenden Bedingungen

$$(6.2) \quad \sup_n E_{Q_n}(h^2(S_n)) < +\infty$$

$$(6.3) \quad x \rightarrow h(x), \quad x \geq 0, \text{ ist stückweise stetig}$$

so konvergiert für alle drei Varianten des Binomialmodells der faire Preis  $S_n^*(t_0, D)$  im Sinne von (6.1) gegen den fairen Preis  $S^*(t_0, D)$  des BSM-Modells.

**Beweis.** Aus  $S_n \Rightarrow S_\ell$  ( $\rightarrow$  Satz 5.1) und (6.3) folgt zunächst mit Satz A.2.2 des Anhangs 2 die schwache Konvergenz der Auszahlungen, d.h.

$$h(S_n) \Rightarrow h(S_\ell)$$

Ist zusätzlich (6.2) erfüllt, folgt mit Satz A.2.4 des Anhangs 2 die Behauptung.

In den Anwendungen kann der Nachweis der Bedingung (6.2) aufwendig sein. Wir zeigen im folgenden die Gültigkeit von (6.2) für europäische Optionen und beginnen mit einem Hilfssatz, der in Anhang 4 bewiesen wird.

**6.2 Lemma.** Es gilt  $E_{Q_n}(S_n^2) \rightarrow E_Q(S_\ell^2)$  für alle drei Varianten des Binomialmodells.

Unmittelbare Folgerungen des Lemmas sind

$$(6.4) \quad E_Q(S_n) \rightarrow E_Q(S_\ell) \quad \text{und} \quad V_{Q_n}(S_n) \rightarrow V_Q(S_\ell)$$

Denn aus  $S_n \Rightarrow S_\ell$  ( $\rightarrow$  Satz 5.1) folgt mit Lemma 6.2 und Satz A.2.4 (beachte: eine konvergente Folge ist beschränkt) die Konvergenz der Erwartungswerte; die Konvergenz der Varianzen ergibt sich dann mit Lemma 6.2 aus dem Verschiebungssatz.

6.3 Satz. Gilt für die Auszahlungsfunktion  $h(x) \leq x + c$  für  $x \geq 0$  und einer beliebigen Konstanten  $c$ , so ist die Bedingung (6.2) erfüllt.

Beweis. Mit Lemma 6.2 und der Konvergenz der Erwartungswerte folgt

$$\begin{aligned} E_{Q_n}(h^2(S_n)) &\leq E_{Q_n}((S_n + c)^2) \\ &= E_{Q_n}(S_n^2 + 2cS_n + c^2) \\ &= E_{Q_n}(S_n^2) + 2cE_{Q_n}(S_n) + c^2 \\ &\rightarrow E_Q(S_\ell^2) + 2cE_Q(S_\ell) + c^2 \end{aligned}$$

Da konvergente Folgen beschränkt sind, folgt die Behauptung.

Für die europäischen Optionen

$$\begin{aligned} \text{Call} \quad h(x) &= \max(x - K, 0) \leq x \quad \text{für } x \geq 0 \\ \text{Put} \quad h(x) &= \max(K - x, 0) \leq x + K \quad \text{für } x \geq 0 \end{aligned}$$

sind die Bedingungen (6.2) und (6.3) erfüllt und wir können die empirischen Resultate des Abschnitts 4 nun auch theoretisch begründen:

$$(6.5) \quad S_{\text{BM},n}^*(t_0, C) \rightarrow S_{\text{BSM}}^*(t_0, C) \quad \text{und} \quad S_{\text{BM},n}^*(t_0, P) \rightarrow S_{\text{BSM}}^*(t_0, P)$$

**Spezialfall.** Für den Spezialfall  $c = r$  des Modells 3 in Abschnitt 3 beweisen wir in Anhang 5 den folgenden Hilfssatz.

6.4 Lemma. Für  $n \rightarrow \infty$  gilt

$$(6.6) \quad B_0(k_0) \rightarrow N(-d_1)$$

$$(6.7) \quad B(k_0) \rightarrow N(-d_2)$$

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir für diesen Spezialfall eine Beweisvariante von (6.5) ohne Rückgriff auf die Sätze A.2.2-A.2.4 zur schwachen Konvergenz in Anhang 2:

$$\begin{aligned} S_{\text{BM}3,n}^*(t_0, C) &= S_0(1 - B_0(k_0)) - Ke^{-rT}(1 - B(k_0)) \\ &\rightarrow S_0(1 - N(-d_1)) - Ke^{-rT}(1 - N(-d_2)) \\ &= S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \\ &= S_{\text{BSM}}^*(t_0, C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{BM}3,n}^*(t_0, P) &= Ke^{-rT}B(k_0) - S_0B_0(k_0) \\ &\rightarrow Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) \\ &= S_{\text{BSM}}^*(t_0, P) \end{aligned}$$

## Anhang 1 Verteilungen

**Zweipunktverteilung.** Die Zufallsvariable  $X$  besitzt eine Zweipunktverteilung mit den Parametern  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $p \in (0, 1)$ , wenn  $X$  diskret verteilt ist mit der Dichtefunktion

$$f_x = \begin{bmatrix} a & b \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

Bezeichnung:  $L(X) = \text{ZP}(a, b, p)$ . Erwartungswert und Varianz berechnen sich wie folgt:

$$E(X) = ap + b(1-p) \quad \text{und} \quad V(X) = a^2p + b^2(1-p) - [ap + b(1-p)]^2$$

Der spezielle Fall  $\text{ZP}(1, 0, p)$  wird *Bernoulliverteilung* genannt. Für eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable  $I$  gilt  $E(I) = p$  und  $V(I) = p(1-p)$ .

A1.1 Satz. Hat die Zufallsvariable  $X$  eine  $\text{ZP}(1, 0, p)$ -Verteilung, so gibt es eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable  $I$  mit

$$X = aI + b(1-I) = (a-b)I + b$$

Beweis. Setze  $I = (X - b)/(a - b)$ .

**Binomialverteilung.** Die Zufallsvariable  $X$  besitzt eine *Binomialverteilung* mit den Parametern  $n \in \mathbb{N}$  und  $p \in [0, 1]$ , wenn  $X$  diskret verteilt ist mit der Dichtefunktion

$$f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Bezeichnung  $L(X) = \text{B}(n, p)$ . Erwartungswert und Varianz berechnen sich wie folgt

$$E(X) = np \quad \text{und} \quad V(X) = np(1-p)$$

Hat  $X$  eine  $\text{B}(n, p)$ -Verteilung, so bezeichnet

$$B(m) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

die Verteilungsfunktion von  $X$  an der Stelle  $m \in \mathbb{N}$ .

A.1.2 Satz. (a) sind  $I_1, \dots, I_n$  unabhängig identisch  $\text{ZP}(1, 0, p)$ -verteilt, so ist die Summe  $B_n = I_1 + \dots + I_n$  binomial  $\text{B}(n, p)$ -verteilt.

(b) sind  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig identisch  $\text{ZP}(a, b, p)$ -verteilt, so ist die Summe darstellbar als

$$X_1 + \dots + X_n = (a-b)B_n + nb \quad \text{mit} \quad L(B_n) = \mathbf{B}(n, p)$$

Speziell gilt für den Random Walk  $Z_1 + \dots + Z_k$  mit  $L(Z_k) = \text{ZP}(1, -1, p)$

$$Z_1 + \dots + Z_n = 2B_n - n$$

**Normalverteilung.** Die Zufallsvariable  $X$  besitzt eine Normalverteilung mit den Parametern  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$  und  $\mathbf{s}^2 > 0$ , wenn  $X$  kontinuierlich verteilt ist mit der Dichtefunktion ( $\rightarrow$  Bild 1)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \mathbf{s}} e^{-\frac{(x-\mathbf{m})^2}{2\mathbf{s}^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Bezeichnung:  $L(X) = N(\mathbf{m}, \mathbf{s}^2)$ . Für den Erwartungswert und die Varianz gilt

$$E(X) = \mathbf{m} \quad \text{und} \quad V(X) = \mathbf{s}^2$$

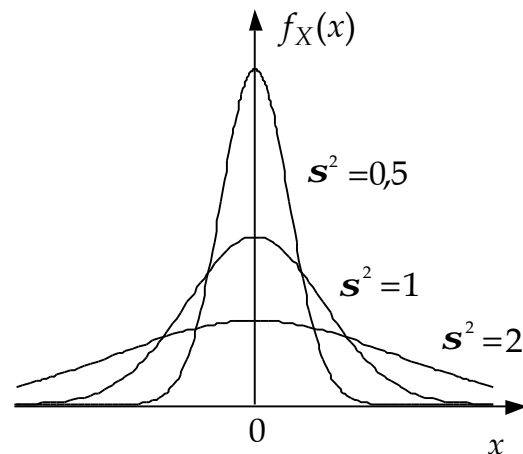


Bild 1

Der spezielle Fall  $\mathbf{m} = 0$  und  $\mathbf{s}^2 = 1$  führt auf die Standardnormalverteilung  $N(0, 1)$ . Für eine  $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable  $X$  bezeichnet

$$N(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

die Verteilungsfunktion von  $X$  an der Stelle  $x$  ( $\rightarrow$  Bild 2).



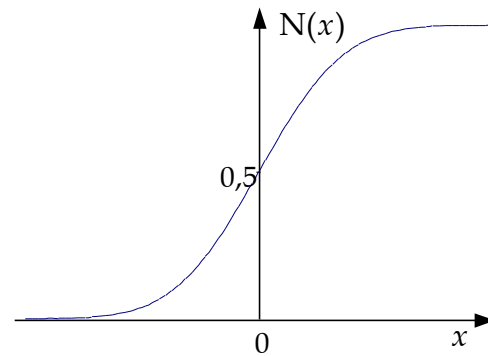


Bild 2

A.1.3 Satz. Eine  $N(\mathbf{m}, \mathbf{s}^2)$ -verteilte Zufallsvariable ist darstellbar als

$$X = \mathbf{m} + \mathbf{s}Z \quad \text{mit} \quad L(Z) = N(0, 1)$$

Beweis. Setze  $Z = (X - \mathbf{m})/\mathbf{s}$  (Standardisierung).

Wir bemerken abschließend noch die Beziehung

$$N(-x) = 1 - N(x)$$

für die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, die unmittelbar aus der Symmetrie der Dichtefunktion folgt.

**Logarithmische Normalverteilung.** Die Zufallsvariable  $X$  besitzt eine logarithmische Normalverteilung (auch Lognormalverteilung) mit den Parametern  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$  und  $\mathbf{s}^2 > 0$ , wenn  $\ln X$  normalverteilt ist mit den Parametern  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{s}^2$ , d.h.  $L(\ln X) = N(\mathbf{m}, \mathbf{s}^2)$ . Sie hat demzufolge die Dichtefunktion ( $\rightarrow$  Bild 3)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \mathbf{s}x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{s}^2}\right) \quad \text{für } x > 0$$

und  $f_X(x) = 0$  für  $x \leq 0$ . Bezeichnung:  $L(\ln X) = LN(\mathbf{m}, \mathbf{s}^2)$ . Folgerung: Ist die Zufallsvariable  $X$  normalverteilt, so ist  $e^X$  lognormalverteilt. Erwartungswert und Varianz berechnen sich wie folgt:

$$E(X) = e^{\mathbf{m} + \mathbf{s}^2/2} \quad \text{und} \quad V(X) = e^{2\mathbf{m} + 2\mathbf{s}^2} (e^{\mathbf{s}^2} - 1)$$

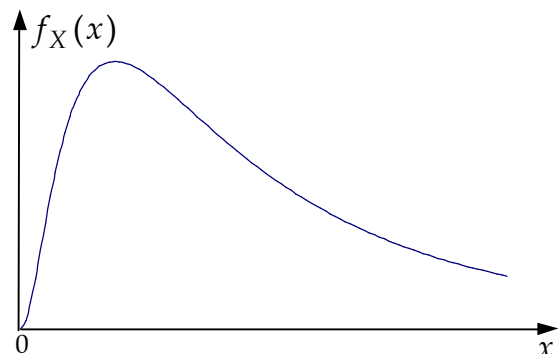


Bild 3

## Anhang 2 Schwache Konvergenz und zentraler Grenzwertsatz

**Schwache Konvergenz.** Eine Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Zufallsvariablen konvergiert *schwach* (auch: *in Verteilung*) gegen eine Zufallsvariable  $X$ , in Zeichen  $X_n \Rightarrow X$ , wenn für jede stetige, beschränkte Funktion  $x \rightarrow g(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , gilt:

$$E(g(X_n)) \rightarrow E(g(X)) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Die schwache Konvergenz einer Zufallsfolge läßt sich auch über den Begriff der Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = P(X < x)$$

charakterisieren ( $\rightarrow$  Billingsley (1968), S. 17-18 und  $\rightarrow$  Bauer, S.191):

A.2.1 Satz. Es konvergiert  $X_n \Rightarrow X$  genau dann, wenn für die zugehörigen Verteilungsfunktionen gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

in allen Stetigkeitsstellen  $x$  von  $F_X$ . Ist  $F_X$  auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig, so konvergiert die Folge  $(F_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$  sogar gleichmäßig gegen  $F_X$ .

Hat  $X$  speziell eine  $N(\mathbf{m}, \mathbf{s}^2)$ -Verteilung und gilt  $X_n \Rightarrow X$ , sowie  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ , so folgt

- $P(a < X_n < b) \rightarrow N\left(\frac{b-\mathbf{m}}{\mathbf{s}}\right) - N\left(\frac{a-\mathbf{m}}{\mathbf{s}}\right)$
- $P(a_n < X_n < b_n) \rightarrow N\left(\frac{b-\mathbf{m}}{\mathbf{s}}\right) - N\left(\frac{a-\mathbf{m}}{\mathbf{s}}\right)$

Und analog für  $P(a \leq X_n \leq b)$  bzw.  $P(a_n \leq X_n \leq b_n)$ .

A.2.2 Satz. Gilt  $X_n \Rightarrow X$  und ist  $x \rightarrow g(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , stückweise stetig, so folgt  $g(X_n) \Rightarrow g(X)$ .

Wir benötigen diesen Satz noch in einer allgemeineren Form. Wir fragen uns, ob aus  $X_n \Rightarrow X$  auch  $g_n(X_n) \Rightarrow g(X)$  folgt, wenn  $g_n$  in gewisser Weise gegen  $g$  konvergiert. Sie  $E$  die Menge aller  $x \in \mathbb{R}$ , für die  $g_n(x_n) \rightarrow g(x)$  bei der Wahl beliebiger Folgen  $x_n \rightarrow x$  nicht gilt ( $\rightarrow$  Billingsley (1968), S.33-34).

Beispiel. Ist  $g(x) \equiv 0$  und  $g_n(x) = 1_{(0, 1/n]}(x)$ , so gilt zwar  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$  (punktweise Konvergenz von  $g_n$  gegen  $g$ ), aber nicht  $g_n(X_n) \rightarrow g(X)$  für die Folge  $x_n = 1/n \rightarrow 0$  (keine gleichmäßige Konvergenz von  $g_n$  gegen  $g$ ). In diesem

Beispiel ist  $E = \{0\}$ . Ist dagegen  $g_n(x) = a_n + b_n x$  mit  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ . Sowie  $g(x) = a + bx$ , so ist  $E = \emptyset$

A.2.3 Satz. Ist  $X_n \Rightarrow X$  und  $P(E) = 0$ , so folgt  $g_n(X_n) \Rightarrow g(X)$ . Speziell gilt für  $X_n \Rightarrow X$ , sowie  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$  auch

$$a_n + b_n X_n \Rightarrow a + bX$$

A.2.4 Satz. Ist  $X_n \Rightarrow X$  und  $\sup_n E(X_n^2) < +\infty$ , so folgt  $E(X_n) \rightarrow E(X)$ .

**Zentraler Grenzwertsatz.** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  seien

$$X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nn}$$

unabhängige Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $m_{nk}$  und Varianz  $s_{nk}^2 > 0$ . Setze für jedes  $n$

$$A_n = X_{n1} + \dots + X_{nn}, \quad m_n = m_{n1} + \dots + m_{nn}, \quad s_n^2 = s_{n1}^2 + \dots + s_{nn}^2$$

A.2.5 Satz (Zentraler Grenzwertsatz). Gilt Lyapounov's Bedingung

$$\frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^n E(|X_{nk}|^2) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

so folgt

$$\frac{A_n - m_n}{s_n} \Rightarrow Z \quad \text{mit } L(Z) = N(0, 1)$$

Bevor wir aus dieser allgemeinen Formulierung des zentralen Grenzwertsatzes weitere Folgerungen ableiten, geben wir kurz ein Beispiel.

Beispiel (Normalverteilte Renditen). Gegeben sei die Position eines Investors. Die kontinuierliche Rendite  $R(T)$  dieser Position über einen Zeitraum  $T$  hat die Additivitätseigenschaft, d.h. bei einer Zerlegung von  $T$  in  $n$  Teilperioden  $T_{n1}, \dots, T_{nn}$  gilt für die Renditen

$$R(T) = \sum_{k=1}^n R_{nk} \quad \text{mit } R_{nk} = R(T_{nk}) \quad \text{für } n = 1, 2, \dots \quad \text{und } k = 1, \dots, n$$

Für einen zukünftigen Zeitraum  $T$  wird  $R(T)$  als Zufallsvariable aufgefaßt.  $R(T)$  habe den Erwartungswert  $n$  und die Varianz  $h^2$ .

Zunächst setzen wir voraus, daß die Teilrenditen  $R_{n1}, \dots, R_{nn}$  stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind mit Erwartungswert  $\mathbf{m}_n = \mathbf{n}/n$  und Varianz  $\mathbf{s}_n^2 = \mathbf{h}^2/n$ . Damit erhalten wir die Darstellung

$$R_{nk} = \mathbf{m}_n + \mathbf{s}_n Z_{nk}$$

wobei  $Z_{n1}, \dots, Z_{nn}$  standardisierte, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen sind. Setzen wir noch  $E(|Z_{nk}|^3) < c$  für alle  $n \in \mathbf{N}$  und  $k = 1, \dots, n$  voraus, so ist mit  $s_n^2 = n\mathbf{s}_n^2 = \mathbf{h}^2$  wegen

$$\frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^n E(|R_{nk} - \mathbf{m}_n|^3) = \frac{1}{\mathbf{h}^3} \cdot n \cdot \mathbf{s}_n^3 \cdot E(|Z_{nk}|^3) = \frac{1}{\mathbf{h}^3} \cdot n \cdot \frac{\mathbf{h}^3}{n^{3/2}} \cdot E(|Z_{nk}|^3) \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

die Bedingung von Lyapunov erfüllt. Mit den Notationen

$$A_n = \sum_{k=1}^n R_{nk} \quad m_n = n\mathbf{m}_n = \mathbf{n} \quad s_n^2 = n\mathbf{s}_n^2 = \mathbf{h}^2$$

folgt dann aus dem Zentralen Grenzwertsatz:

$$\frac{R(T) - \mathbf{n}}{\mathbf{h}} = \frac{\sum_{k=1}^n R_{nk} - n\mathbf{m}_n}{\mathbf{s}_n \sqrt{n}} = \frac{A_n - m_n}{s_n} \Rightarrow Z \quad \text{mit } L(Z) = \mathbf{N}(0, 1).$$

d.h.  $R(T)$  ist  $N(\mathbf{n}, \mathbf{h}^2)$ -verteilt. Damit wären kontinuierliche Renditen einer zukünftigen Periode normalverteilte zufällige Größen. Daß empirische Untersuchungen mehr oder weniger starke Abweichungen von der Normalverteilung ergeben, spricht nicht gegen den Zentralen Grenzwertsatz. Vielmehr dürfte die Annahme unabhängiger Rendite-Zeitreihen in der Praxis nur approximativ erfüllt sein.

A.2.6 Korollar. Für jedes  $n \in \mathbf{N}$  seien

$$I_{n1}, I_{n2}, \dots, I_{nn}$$

unabhängige, identisch  $\mathbf{ZP}(1, 0, p_n)$ -verteilte Zufallsvariablen mit  $p_n \rightarrow p \in (0, 1)$ . Dann gilt für die Summe  $B_n = I_{n1} + \dots + I_{nn}$

$$\frac{B_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \Rightarrow Z \quad \text{mit } L(Z) = \mathbf{N}(0, 1)$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$m_n = np_n \quad \text{und} \quad s_n^2 = np_n(1-p_n)$$

Da  $I_{nk}^3$  mit Wahrscheinlichkeit  $p_n$  den Wert 1 und mit Wahrscheinlichkeit  $1-p_n$  den Wert 0 annimmt, gilt  $E(I_{nk}^3) = p_n$  und damit weiter

$$\frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^n E(I_{nk}^3) = \frac{np_n}{n^{3/2}(p_n(1-p_n))^{3/2}} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Also ist Lyapounov's Bedingung erfüllt.

A.2.7 Korollar. Für eine Folge  $X_1, X_2, \dots$  unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit  $E(X_n) = \mathbf{m}$  und  $V(X_n) = \mathbf{s}^2 > 0$  gilt

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mathbf{m}}{\mathbf{s}\sqrt{n}} \Rightarrow Z \quad \text{mit} \quad L(Z) = N(0, 1)$$

Wir erwähnen abschließend noch den Spezialfall des Zentralen Grenzwertsatzes in der Form von Moivre-Laplace.

A.2.8 Korollar. Für eine Folge  $I_1, I_2, \dots$  unabhängiger, identisch  $ZP(1, 0, p)$ -verteilter Zufallsvariablen gilt für die Summe  $B_n = I_1 + \dots + I_n$

$$\frac{B_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \Rightarrow Z \quad \text{mit} \quad L(Z) = N(0, 1)$$

## Anhang 3 Martingale

**Begriff.** Eine Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Zufälliger Größen ist ein *Martingal*, wenn für jedes  $n$  gilt:

$$E(X_{n+1} | X_1, \dots, X_n) = X_n$$

fast sicher d.h. wenn der bedingte Erwartungswert der Größe  $X_{n+1}$  bei Vorliegen sämtlicher Informationen aus den Variablen  $X_1, \dots, X_n$  gleich der Zufallsvariablen  $X_n$  ist.

**Interpretation.** Sei  $G_n$  der zufällige Gewinn eines Spielers in der  $n$ -ten Runde. Das Gesamtspiel heißt aus naheliegenden Gründen *fair*, wenn gilt:

$$E(G_1) = 0 \quad \text{und} \quad E(G_{n+1} | G_1, \dots, G_n) = 0 \quad \text{fast sicher}$$

Dann gilt für den Gewinn

$$A_n = G_1 + \dots + G_n$$

nach der  $n$ -ten Runde

$$\begin{aligned} E(A_{n+1} | A_1, \dots, A_n) &= E(A_n + G_{n+1} | A_1, \dots, A_n) \\ &= E(A_n | A_1, \dots, A_n) + E(G_{n+1} | G_1, \dots, G_n) \\ &= A_n \end{aligned}$$

d.h.  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist ein Martingal.

## Anhang 4 Beweis von Lemma 6.2

Für alle drei Modelle ist zu zeigen:

$$E_{Q_n}(S_n^2) \rightarrow E_Q(S_\ell^2)$$

Zunächst gilt mit (2.2) und (2.3)

$$E_Q(S_\ell^2) = V_Q(S_\ell) + [E_Q(S_\ell)]^2 = S_0^2(e^{2cT}(e^{\mathbf{s}^2 T} - 1) - e^{2cT}) = S_0^2 e^{2cT + \mathbf{s}^2 T}$$

**Modell 1.** Aus Abschnitt 5 entnehmen wir

$$\ln S_n = \ln S_0 + \mathbf{m}T + \mathbf{s} \sqrt{T} \frac{2B_n - n}{\sqrt{n}}$$

und damit

$$S_n^2 = S_0^2 \exp\left(2\mathbf{m}T + 2\mathbf{s} \sqrt{T} \cdot \frac{2B_n - n}{\sqrt{n}}\right)$$

Beachten wir im folgenden  $\mathbf{m} = c - \mathbf{s}^2/2$ ,  $2k - n = k - (n - k)$ ,  $p = 1/2$  und die abkürzende Notation  $\mathbf{a} = \mathbf{s} \sqrt{T}$ , so gilt mit dem binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned} E_{Q_n}(S_n^2) &= S_0^2 e^{2\mathbf{m}T} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{2\mathbf{a}/\sqrt{n}(2k-n)} \\ &= S_0^2 e^{2\mathbf{m}T} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2} e^{2\mathbf{a}/\sqrt{n}}\right)^k \left(\frac{1}{2} e^{-2\mathbf{a}/\sqrt{n}}\right)^{n-k} \\ &= S_0^2 e^{2\mathbf{m}T} \left(\frac{1}{2} e^{2\mathbf{a}/\sqrt{n}} + \frac{1}{2} e^{-2\mathbf{a}/\sqrt{n}}\right)^n \\ &\rightarrow S_0^2 e^{2\mathbf{m}T} e^{2\mathbf{s}^2 T} = S_0^2 e^{2cT + \mathbf{s}^2 T} \end{aligned}$$

Setzen wir  $x = 1/\sqrt{n}$  und  $A = A(x)$  für die Klammer in der vorletzten Zeile, so bleibt zu zeigen:

$$A^{1/x^2} = \left(\frac{1}{2} e^{2ax} + \frac{1}{2} e^{-2ax}\right)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{\ln A}{x^2}\right) \rightarrow e^{2\mathbf{s}^2 T}$$

für  $x \rightarrow 0$ . Nun gilt - weiterhin für  $x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
A(x) &= 0,5e^{2ax} + 0,5e^{-2ax} \rightarrow 1 \quad \text{und damit} \quad \ln A(x) \rightarrow 0 \\
A'(x) &= ae^{2ax} - ae^{-2ax} \rightarrow 0 \\
A''(x) &= 2a^2e^{2ax} - 2a^2e^{-2ax} \rightarrow 4a^2
\end{aligned}$$

Zweimalige Anwendung der l'Hospitalschen Regel liefert

$$\frac{\ln A}{x^2} \hat{=} \frac{1}{A} \cdot \frac{A'}{2x} \hat{=} \frac{1}{A} \cdot \frac{A''}{2} \rightarrow 2a^2 = 2s^2T$$

**Modelle 2 und 3.** Mit  $a = s\sqrt{T}$  folgt aus (3.4):

$$S_n^2 = S_0^2 e^{(2B_n - n)2\ln u} = S_0^2 e^{(2B_n - n)2a/\sqrt{n}}$$

Beachten wir wieder  $m = c - s^2/2$ ,  $2k - n = k - (n - k)$  und den binomischen Lehrsatz, so folgt

$$\begin{aligned}
E_{Q_n}(S_n^2) &= S_0^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{2a/\sqrt{n}(2k-n)} \\
&= S_0^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^{2a/\sqrt{n}})^k ((1-p)e^{-2a/\sqrt{n}})^{n-k} \\
&= S_0^2 (pe^{2a/\sqrt{n}} + (1-p)e^{-2a/\sqrt{n}})^n \\
&= S_0^2 (p(e^{2a/\sqrt{n}} - e^{-2a/\sqrt{n}}) + e^{-2a/\sqrt{n}})^n \\
&\rightarrow S_0^2 e^{2mT + 2s^2T} = S_0^2 e^{2cT + s^2T}
\end{aligned}$$

Setzen wir  $x = 1/\sqrt{n}$  und  $A = A(x)$  für die Klammer in der vorletzten Zeile, so bleibt zu zeigen

$$A^{1/x^2} = (p(e^{2ax} - e^{-2ax}) + e^{-2ax})^{1/x^2} = \exp\left(\frac{\ln A}{x^2}\right) \rightarrow e^{2mT + 2s^2T}$$

für  $x \rightarrow 0$ . Die folgenden Überlegungen werden für die Modelle 2 und 3 getrennt durchgeführt.

**Modell 2.** Beachten wir  $m\Delta t = mT x^2$  und  $s\sqrt{\Delta t} = ax$ , so gilt

$$\begin{aligned}
p &= \frac{m\Delta t - s\sqrt{\Delta t}}{2s\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{m\Delta t}{s\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{mT}{a} x \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad x \rightarrow 0 \\
p' &= \frac{mT}{2a} \quad \text{und} \quad p'' = 0
\end{aligned}$$

und weiter für  $x \rightarrow 0$



$$\begin{aligned}
 D &= e^{2ax} - e^{-2ax} \rightarrow 0 \\
 D' &= 2ae^{2ax} + 2ae^{-2ax} \rightarrow 4a \\
 D'' &= 4a^2e^{2ax} - 4a^2e^{-2ax} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 A &= pD + e^{-2ax} \rightarrow 1 \\
 A' &= p'D + pD' - 2ae^{-2ax} \rightarrow 2a - 2a = 0 \\
 A'' &= p''D + 2p'D' + pD'' + 4a^2e^{-2ax} \rightarrow 4m\bar{T} + 4a^2
 \end{aligned}$$

**Modell 3.** Beachten wir  $c\Delta t = cTx^2$  und  $s\sqrt{\Delta t} = ax$ , so gilt

$$\begin{aligned}
 p(e^{2ax} - e^{-2ax}) &= \frac{e^{cTx^2} - e^{-ax}}{e^{ax} - e^{-ax}} (e^{ax} - e^{-ax})(e^{ax} + e^{-ax}) \\
 &= (e^{cTx^2} - e^{-ax})(e^{ax} + e^{-ax}) = G \cdot H
 \end{aligned}$$

und weiter für  $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 G &= e^{cTx^2} - e^{-ax} \rightarrow 0 \\
 G' &= 2cTx e^{cTx^2} + ae^{-ax} \rightarrow a \\
 G'' &= 2cT e^{cTx^2} + 4c^2T^2x^2 e^{cTx} - a^2e^{-ax} \rightarrow 2cT - a^2 \\
 H &= e^{ax} + e^{-ax} \rightarrow 2 \\
 H' &= ae^{ax} - ae^{-ax} \rightarrow 0 \\
 H'' &= a^2e^{ax} + a^2e^{-ax} \rightarrow 2a^2
 \end{aligned}$$

und damit analog zu Modell 2

$$\begin{aligned}
 A &= GH + e^{-2ax} \rightarrow 1 \\
 A' &= G'H + GH' - 2ae^{-2ax} \rightarrow 2a - 2a = 0 \\
 A'' &= G''H + 2G'H' + GH'' + 4a^2e^{-2ax} \rightarrow 4cT - 2a^2 + 4a^2 = 4m\bar{T} + 4a^2
 \end{aligned}$$

Zweimalige Anwendung der l'Hospitalschen Regel liefert für beide Modelle

$$\frac{\ln A}{x^2} \hat{=} \frac{1}{A} \cdot \frac{A'}{2x} \hat{=} \frac{1}{A} \cdot \frac{A''}{2} \rightarrow 2m\bar{T} + 2s^2T$$

Nachtrag. Der Beweis von Satz 5.1 verwendet in Modell 3 die folgenden Resultate:  
Für  $n \rightarrow \infty$ , d.h. für  $x \rightarrow 0$  gilt

- $p = \frac{e^{cTx^2} - e^{-ax}}{e^{ax} - e^{-ax}} = \frac{Z}{N} \rightarrow \frac{1}{2}$
- $\sqrt{n}(2p-1) = \frac{2p-1}{x} \hat{=} 2p' \rightarrow \frac{m\Gamma}{s\sqrt{T}}$

wir beachten zunächst

$$Z = G \rightarrow 0$$

$$Z' = G' \rightarrow \mathbf{a}$$

$$Z'' = G'' \rightarrow 2cT - \mathbf{a}^2$$

$$N = e^{ax} - e^{-ax} \rightarrow 0$$

$$N' = \mathbf{a}(e^{ax} + e^{-ax}) \rightarrow 2\mathbf{a}$$

$$N'' = \mathbf{a}^2 N \rightarrow 0$$

Dann gilt mit der Regel von l'Hospital

$$p = \frac{Z}{N} \hat{=} \frac{Z'}{N'} \rightarrow \frac{\mathbf{a}}{2\mathbf{a}} = \frac{1}{2}$$

$$p' = \frac{Z'N - ZN'}{N^2} \hat{=} \frac{Z''N - ZN''}{2NN'} = \frac{Z'' - \mathbf{a}^2 Z}{2N'} \rightarrow \frac{2cT - \mathbf{a}^2}{4\mathbf{a}} = \frac{m\Gamma}{2s\sqrt{T}}$$

## Anhang 5 Beweis von Lemma 6.4

Wir verwenden den zentralen Grenzwert in der einfachen Form des Korollars A.2.7 in Anhang 2 und beachten, daß mit Satz A.2.1 für eine konvergente Folge  $a_n \rightarrow a$  gilt

$$P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < a_n\right) \rightarrow N(a) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Beweis von (6.7). Für ein  $B(n, p)$ -verteiltes  $S_n$  gilt

$$\begin{aligned} B(k_0) &= P(S_n < k_0) = P\left(S_n < -\frac{\ln(S_0/K) + n \ln d}{\ln(u/d)}\right) \\ &= P\left(\frac{S_n - p}{\sqrt{np(1-p)}} < -\frac{\ln(S_0/K) - \sqrt{n} \mathbf{s} \sqrt{T} + 2p \sqrt{n} \mathbf{s} \sqrt{T}}{2 \mathbf{s} \sqrt{T} \sqrt{p(1-p)}}\right) \end{aligned}$$

Da mit dem Nachtrag in Anhang 4 gilt

- $2 \mathbf{s} \sqrt{T} \sqrt{p(1-p)} \rightarrow \mathbf{s} \sqrt{T}$
- $\sqrt{n}(2p-1) \mathbf{s} \sqrt{T} \rightarrow \mathbf{m}T = (r - \mathbf{s}^2/2)T$

folgt die Behauptung

$$B(k_0) \rightarrow N\left(-\frac{\ln(S_0/K) + (r - \mathbf{s}^2/2)T}{\mathbf{s} \sqrt{T}}\right) = N(-d_2)$$

Beweis von (6.6). Für ein  $B(n, p_0)$ -verteiltes  $S_n$  gilt

$$\begin{aligned} B_0(k_0) &= P(S_n < k_0) = P\left(S_n < -\frac{\ln(S_0/K) + n \ln d}{\ln(u/d)}\right) \\ &= P\left(\frac{S_n - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} < -\frac{\ln(S_0/K) - \sqrt{n} \mathbf{s} \sqrt{T} + 2p_0 \sqrt{n} \mathbf{s} \sqrt{T}}{2 \mathbf{s} \sqrt{T} \sqrt{p_0(1-p_0)}}\right) \end{aligned}$$

Da  $u = e^{\mathbf{s} \sqrt{T}/\sqrt{n}} \rightarrow 1$  und  $e^{-r\Delta t} = e^{-rT/n} \rightarrow 1$ , folgt aus  $p \rightarrow 1/2$  auch  $p_0 = p u e^{-r\Delta t} \rightarrow 1/2$ . Damit gilt im Sinne der Nachtrages in Anhang 4

- $2 \mathbf{s} \sqrt{T} \sqrt{p_0(1-p_0)} \rightarrow \mathbf{s} \sqrt{T}$
- $\sqrt{n}(2p_0 - 1) \mathbf{s} \sqrt{T} = \frac{2pe^{\mathbf{s} \sqrt{T}x - rTx^2} - 1}{x} \cdot \mathbf{s} \sqrt{T}$

$$\begin{aligned} &\hat{=} (2p'e^{s\sqrt{T}x-rTx^2} + 2p(s\sqrt{T} - 2rTx)e^{s\sqrt{T}x-rTx^2})s\sqrt{T} \\ &\rightarrow \left( \frac{mT}{s\sqrt{T}} + s\sqrt{T} \right) s\sqrt{T} = (r - s^2/2)T + s^2T = (r + s^2/2)T \end{aligned}$$

und damit die Behauptung

$$B_0(k_0) \rightarrow N\left(-\frac{\ln(S_0/K) + (r + s^2/2)T}{s\sqrt{T}}\right) = N(-d_1)$$

## Literatur

Bauer, H., Wahrscheinlichkeitstheorie. De Gruyter, Berlin 1991

Billingsley, P., Convergence of Probability Measures. John Wiley, New York 1968

Billingsley, P., Weak Convergence of Measures: Applications in Probability. SIAM, Philadelphia 1971

Cremers, H., Basiswissen Finanzmathematik. 3.Auflage von Basiswissen Mathematik und Stochastik für Banker. Bankakademie Verlag, Frankfurt 2000/2001 (geplant)

Cox, J. und Rubinstein, M., Option Markets. Englewood Cliffs 1985

Hull, J.C.; Options, Futures and other Derivatives. Prentice Hall, London 1997

### Tabelle der Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung

Tafel: Normalverteilung  $N(0, 1)$ ; Verteilungsfunktion  $x \rightarrow N(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ;  
für  $x < 0$  gilt  $N(x) = 1 - N(-x)$

$x$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3,	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000