

Cremers, Heinz; Walzner, Jens

Working Paper

Modellierung des Kreditrisikos im Portfoliofall

Frankfurt School - Working Paper Series, No. 127

Provided in Cooperation with:

Frankfurt School of Finance and Management

Suggested Citation: Cremers, Heinz; Walzner, Jens (2009) : Modellierung des Kreditrisikos im Portfoliofall, Frankfurt School - Working Paper Series, No. 127, Frankfurt School of Finance & Management, Frankfurt a. M.,
<https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:101:1-20090826290>

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/27933>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

Frankfurt School – Working Paper Series

No. 127

**Modellierung des
Kreditrisikos im Portfoliofall**

von Heinz Cremers und Jens Walzner

August 2009



**Frankfurt School of
Finance & Management**
Bankakademie | HfB

Sonnemannstr. 9–11 60314 Frankfurt an Main, Germany
Phone: +49 (0) 69 154 008 0 Fax: +49 (0) 69 154 008 728
Internet: www.frankfurt-school.de

Abstract

The current financial market crisis has impressively demonstrated the importance of an effective credit risk management for financial institutions. At the same time, the use and the valuation of credit derivatives has been widely criticised as a result of the crisis. Over the past decade, credit derivatives emerged as an important part of credit risk management as these offer a broad range of possibilities to reduce credit risk through active credit portfolio management. This has represented a quantum leap in the further development of credit risk management. Credit risk management without using credit derivatives no longer seems to be an appropriate alternative. However, correct valuation of these derivatives is still challenging. The crisis has demonstrated that the issue is less about using credit derivatives than about developing valid valuation techniques. A sound understanding of already existing credit pricing models is necessary for such a development. These models are the key focus of this working paper.

Literature distinguishes between three different kinds of credit pricing models: Asset-Based-Models, Intensity-Based-Models and hybrid models. The primary purpose of credit risk modelling is to simulate the default of a defaultable asset. Asset-Based-Models try to model the default by analyzing changes in value of such an asset: if the value of a defaultable asset falls below a defined threshold, the asset defaults. While this is economically plausible, the modelling of a default in an Intensity-Based-Model is rather random. It is simply the result of a stochastic process. While Intensity-Based-Models do not offer any economic rationale for the default, their results are surprisingly realistic. Hybrid models are a combination of both kind of models. These try to establish a connection between the economic rationale of the Asset-Based-Models and the empirical validity of the results of the Intensity-Based-Models.

While this paper focuses on the valuation techniques in a portfolio case, Frankfurt School Working Paper No. 126 concentrates on credit risk modelling in a single asset case.

Key words: credit risk pricing models; asset-based models; asset-value models; structural models; intensity-based models; reduced-form models; credit derivatives; credit default swap; pricing; valuation; default spread; risk management; credit portfolio management

JEL classification: C22; G11; G12; G21; G32

ISSN: 14369753

Contact:

Prof. Dr. Heinz Cremers
Frankfurt School of Finance & Management
Sonnemannstrasse 9-11
D-60314 Frankfurt am Main
Germany

Jens Walzner, M.Sc.
Dresdner Kleinwort
Theodor-Heuss-Anlage 44-46
D-60486 Frankfurt am Main
Germany

Phone: +49-(0)69 154008 – 213
E-Mail: h.cremers@frankfurt-school.de

Mobil: +49-(0)160 2859686
E-Mail: jens.walzner@dkib.com

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	4
Symbolverzeichnis	5
1. Einleitung	9
1.1 Ausgangslage.....	9
1.2 Definition der Begriffe Kreditrisiko, bonitätssensitiver Finanztitel und Kreditrisikomodell.....	9
2. Modellüberblick	12
3. Modellierung des Kreditrisikos im Portfoliofall	15
3.1 Copula als Abhängigkeitsmaß.....	17
3.2 Unternehmenswertmodelle.....	21
3.2.1 Einführung der makroökonomischen Abhängigkeit anhand des Bernoulli-Mischungsmodells	21
3.2.2 Einführung der mikroökonomischen Abhängigkeit	38
3.3 Intensitätsmodelle	39
3.3.1 Einführung der makroökonomischen Abhängigkeit	39
3.3.2 Einführung der mikroökonomischen Abhängigkeit	47
3.4 Hybride Kreditrisikomodelle.....	48
3.4.1 Einführung der makroökonomischen Abhängigkeit	48
3.4.2 Einführung der mikroökonomischen Abhängigkeit	48
3.5 Praxisbeispiel: Bewertung von Collateralized Debt Obligations	48
4. Fazit	59
Literaturverzeichnis	61

Tabellenverzeichnis

Tab. 1: Verlustverteilung bei einem homogenen Kreditportfolio	29
Tab. 2: Ausgangsdaten für die Modellierung eines heterogenen Beispielfortfolios.....	33
Tab. 3: Verlustverteilung bei einem heterogenen Kreditportfolio	33
Tab. 4: Ein Szenario der Monte-Carlo-Simulation zur Ermittlung des n^{th} -to-default-Spreads	45
Tab. 5: Contingent und Premium Leg eines Szenarios der Monte-Carlo-Simulation.....	45
Tab. 6: Faire n^{th} -to-default-Swap-Spreads bei 1.000 durchgeführten Simulationen.....	46
Tab. 7: Exemplarische Berechnung des Spreads einer Mezzanine Tranche eines CDO	55
Tab. 8: Auszahlungsquoten und faire Spreads der einzelnen CDO Tranchen bei unterschiedlicher Korrelation	56

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Kreditrisikomodelle im Überblick.....	12
Abb. 2: Unkorrelierte Gauß-Copula mit normalverteilten Randverteilungen.....	19
Abb. 3: Gauß-Copula mit normalverteilten Randverteilungen und Korrelationskoeffizienten $r = 0,9$	19
Abb. 4: Gumbel-Copula mit normalverteilten Randverteilungen und Korrelationparameter $r = 1,5$	20
Abb. 5: Dichtefunktion bei einem homogenen Kreditportfolio	30
Abb. 6: Verteilungsfunktion bei einem homogenen Kreditportfolio	30
Abb. 7: Dichtefunktion des heterogenen Beispiel-Portfolios.....	34
Abb. 8: Verteilungsfunktion des heterogenen Beispiel-Portfolios.....	35
Abb. 9: Abhängigkeit des n^{th} -to-Default-Spreads von der Basket-Korrelation	46
Abb. 10: Funktionsweise von Collateralized Debt Obligations	49
Abb. 11: Payoff-Profil eines Investors in eine Mezzanine Tranche eines CDO	51
Abb. 12: Dichtefunktion der Ausfallwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Asset-Korrelation.....	52

Symbolverzeichnis

$[t_{i-1}, t_i]$	Zeitintervall von t_{i-1} bis t_i
$[t_{i-1}, \tau]$	Zeitintervall von t_{i-1} bis τ
α	Konfidenzniveau
A_i	Standardisierter Firmenwert
A_t	Kompensator / Ausfalltrend
a_j	Konstanter Gewichtungsparmeter
\vec{a}_i	Vektor der konstanten Faktorgewichte des Makro-Faktors X
a	Unterer Tranchierungspunkt
B_i	Standardisiertes Nominal des Fremdkapitals bzw. standardisierte Ausfallschranke
b_i	Konstantes Faktorgewicht des idiosynkratischen Faktors Z_i
b	Oberer Tranchierungspunkt
B_0	Barwert eines ausfallrisikobehafteten Finanztitels
B_0^F	Barwert der Rückzahlung einer Forderung, welche zum Zeitpunkt T erfolgt
B_0^R	Barwert der Recovery-Zahlung, welche bei Eintritt eines Ausfallereignisses zum Zeitpunkt τ geleistet wird
B_T	Wert eines ausfallgefährdeten Finanztitels bei Fälligkeit
c	Konstante Couponzahlungen
$C(\cdot)$	Wert einer europäischen Call-Option
$C(u, v)$	Copulafunktion
CB	Couponbond
CB_0	Barwert eines Couponbonds
CF_T	Cash-Flow zum Zeitpunkt T
C_r^{Ga}	Gauss'sche Copula mit Korrelationskoeffizienten r
$C_{r,w}^t$	t-Copula mit Korrelationskoeffizienten r und w Freiheitsgraden
C_r^{Gumbel}	Gumbel-Copula mit Korrelationskoeffizienten r
$C_r^{Clayton}$	Clayton-Copula mit Korrelationskoeffizienten r
C^\perp	Produkt-Copula
Cov	Kovarianz
$CVaR$	Credit-Value at Risk
D	Ausfallereignis / Defaultindikator
DB	Ausfallschwelle (Default Barrier)

DF	Diskontfaktor
E^Q	Risikoneutraler Erwartungswert beim äquivalenten Martingalmaß Q
E_t	Marktwert des Eigenkapitals zum Zeitpunkt t
EAD	Exposure at Default
EL	Expected Loss
e	Eulerische Zahl
F	Verteilungsfunktion
$F(x, y)$	Gemeinsame Verteilungsfunktion von x und y
$F_{\rho, \rho}$	Grenzverlustverteilung bei großen Portfolien
f	Dichtefunktion
$G(x)$	Verteilungsfunktion von W_1^i
$H(x)$	Verteilungsfunktion von Z_i
h_i	Basisintensität bzw. der Intensität bei einem einzelnen bonitätssensitiven Finanztitel
$J(t)$	Sprung-Prozess
j	Ausfallindikatorprozess des Unternehmens / Rating-Kategorie
K	Nominal des Zerobonds
k	Konstanter Faktor / Anzahl der Ausfälle
L	Quasi-Verschuldungsgrad
L_n	Portfolioverlust
LGD	Loss Given Default
M_T	Historisches Tief des Firmenwerts
M	Anzahl alter Aktien
N	Zählprozess / (inhomogener) Poisson-Prozess / Anzahl neuer Aktien
$P(\cdot)$	Wert einer europäischen Put-Option
p	Ausfallwahrscheinlichkeit
\bar{p}	Durchschnittliche Ausfallwahrscheinlichkeit
$p(X)$	Bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von X
p_n	Bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit in Abhängigkeit von Ratingmigrationen
p_n kum.	Kumulierte bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit in Abhängigkeit von Ratingmigrationen
p_{surv}	Überlebenswahrscheinlichkeit
$Payoff_{[a,b]}(z)$	Auszahlung an den Investor bei eine CDO-Tranche

Q_a	Alpha-Quantil
$Q(x)$	Verteilungsfunktion von X
$q(t,T)$	Bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit, welche vom Wissensstand des Investors \mathfrak{S} zum Zeitpunkt t abhängig ist, für den Eintritt eines Ausfallereignisses vor Fälligkeit T eines Finanztitels
Rec	Recovery-Rate
r	Risikoloser (kontinuierlicher) Zinssatz / Korrelationsparameter bei Copulae
S	Emissionskurs eines Zerobonds
$S_{[a,b]}$	Überlebensanteil / Auszahlungsquote
$S_{[a,b]}(X)$	Bedingter Überlebensanteil
s	Credit Spread
\bar{s}	Durchschnittlicher Credit Spread
s_{CDS}	Credit Spread eines Credit Default Swaps
s_{CDS}^{fair}	Fairer Credit Spread eines Credit Default Swaps
$s_{implizit}$	Impliziter Credit Spread
$s^{n:m}$	Credit Spread eines n^{th} -to-default Swaps mit einem Basket bestehend aus m Titeln
T	Zeitpunkt der Fälligkeit eines Finanztitels
τ	Zufälliger Zeitpunkt des Eintritts eines Ausfallereignisses
τ_1	Ausfallzeitpunkt beim klassischen optionstheoretischen Ansatz
τ_2	Ausfallzeitpunkt beim First-Passage Ansatz
U	Unabhängige Zufallsvariable
U_t	Kontinuierlicher Markow-Prozess
UL	Unexpected Loss
u	Realisation von U / Ausfallzeitpunkt im kontinuierlichen Fall
V_0	Firmenwert zum Zeitpunkt t
V_t	Marktwert eines Unternehmens (Entity-Value) zum Zeitpunkt t
\bar{V}_t	„Kritischer Unternehmenswert“, welcher vorhanden sein muss, damit das Eigenkapital ausreichend ist, um Couponzahlungen zu gewährleisten
Var	Varianz
V_{risky}	Wert eines risikobehafteten Finanztitels
V_{rf}	Wert eines risikofreien Finanztitels
v	Konstanter Abstand des Firmenwerts vom historischen Tief des Firmenwerts
W_t	Standard-Brownsche Bewegung

W_1^i	standardisierter Firmenwert
w	Freiheitsgrade
X	Zufallsvariable, die den Makro-Faktor beschreibt
X_{syst}	Systematisches Ausfallrisiko eines Unternehmens
X_i	Idiosynkratisches Ausfallrisiko eines Unternehmens
x	Realisation des Makro-Faktors X
Y_i	Ausfallindikator
y_{rf}	Rendite einer ausfallrisikofreien Anleihe
y_{risky}	Rendite einer ausfallrisikobehafteten Anleihe
Z_i	Zufallsvariable, die den unternehmensspezifischen, idiosynkratischen Faktor beschreibt
z	Erwarteter Portfolioverlust
λ	Intensität
$\tilde{\lambda}$	Stochastische Intensität
$\tilde{\lambda}_{FTD}$	Stochastische Intensität eines First-to-Default-Swaps
$\tilde{\Lambda}_i$	Nicht-negative stochastische Funktion
ε	„Error“-Faktor
\mathfrak{S}_t	Wissensstand des Investors zum Zeitpunkt t
μ	Drift-Parameter der geometrischen Brownschen Bewegung
π	Pi
σ	Volatilität des Firmenwertes
σ_E	Volatilität des Marktwert des Eigenkapital
ρ	Korrelationsparameter
ρ_{ij}	Korrelation zweier Firmenwerte zueinander
Φ	Standardnormalverteilung
Φ_2	Bivariate Standardnormalverteilung
Φ^{-1}	Inverse der Standardnormalverteilung
$\varphi(\cdot)$	Dichtefunktion
\mathfrak{R}	Menge der reellen Zahlen
Σ	Kovarianzmatrix
Γ	Mittels Cholesky-Zerlegung einer Korrelationsmatrix gewonnene untere Dreiecksmatrix

1. Einleitung

1.1 Ausgangslage

Die jüngste internationale Finanzkrise – ausgelöst durch die sogenannte Subprime-Krise – hat dazu geführt, dass sich die Nachfrage und somit gleichzeitig sowohl die Entstehung von neuen als auch der Handel mit bestehenden, komplexen Kreditprodukten stark reduziert hat.¹ In diesem Zusammenhang wird immer wieder der Ruf nach einer strengeren staatlichen Regulierung von Rating-Agenturen und Kreditinstituten laut.² Oftmals steht hierbei auch die fehlerhafte Anwendung oder die Manipulation von Kreditrisikomodellen in der Kritik. Beispielsweise werden der Rating-Agentur Moody's „Fehler in der Modellberechnung“ von Constant Proportion Debt Obligations (CPDOs) vorgeworfen.³ Wie dieses Beispiel zeigt und die Krise eindrucksvoll verdeutlicht, gehen mit der Modellierung von realen Zusammenhängen Risiken einher, welche nicht zu vernachlässigen sind. Darüber hinaus hat die Finanzkrise unter anderem aufgrund dieser Risiken das Bewusstsein über die Notwendigkeit eines fortschrittlichen Risikomanagements geschärft. Auch der Einsatz von Kreditderivaten im Rahmen eines aktiven Risikomanagements mit dem Ziel eine optimale Risikoallokation zu erreichen, ist weiterhin sinnvoll. Die Identifikation und Quantifizierung von Risiken spielt dabei eine maßgebliche Rolle. Nur durch die Kenntnis risikoadäquater Pricing- und Bewertungsmethoden ist es möglich eine fundierte Entscheidung darüber zu treffen, ob und welche Risiken eingegangen oder abgesichert werden sollen. Die Grundlage dessen bilden die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Kreditrisikomodelle.

1.2 Definition der Begriffe Kreditrisiko, bonitätssensitiver Finanztitel und Kreditrisikomodell

Kreditrisiko. Das Kreditrisiko entsteht dem Gläubiger einer Forderung aus der Unsicherheit über die Zahlungsfähigkeit oder –willigkeit seines Schuldners. Es beschreibt die Gefahr, dass die Forderung nicht, nur teilweise oder verspätet zurückbezahlt wird. Als Forderungen gelten unter anderem Zins- und Tilgungsleistungen aus Krediten und Anleihen, aber auch Forderungen aus dem positiven Marktwert eines derivativen Geschäfts.⁴ Im Hinblick auf die potentielle Verlustursache lässt sich das Kreditrisiko in die Teilkomponenten „(Adressen-/ Kontrahenten-)Ausfallrisiko (Default Risk)“ und „Bonitätsänderungsrisiko (Spread-Widening Risk)“ differenzieren.⁵ Unter dem Ausfallrisiko versteht man die Gefahr eines

¹ Vgl. Handelsblatt: Sturm über Wall Street. Ausgabe vom 17.06.2008.

² Vgl. Handelsblatt: Die Aufseher ziehen die Zügel an. Ausgabe vom 17.06.2008.

³ Vgl. Handelsblatt: Neutralität nicht garantiert. Ausgabe vom 02.07.2008.

⁴ Vgl. Müller, Frank: Kreditderivate und Risikomanagement. Frankfurt am Main: Bankakademie-Verlag GmbH, 2000. S. 7

⁵ Vgl. Burghof, Hans-Peter et al.: Kreditderivate – Handbuch für die Bank und Anlagepraxis. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2005. S. 774

konkreten Ausfalls – beispielsweise durch Insolvenz – des Kreditnehmers.⁶ Demgegenüber wird der Wertverlust einer Position, welcher durch eine Erhöhung der Wahrscheinlichkeit oder des Ausmaßes eines möglichen Ausfalls bedingt wird, als Bonitätsänderungsrisiko bezeichnet.⁷ Im Rahmen dieser Arbeit liegt der Fokus auf dem Ausfallrisiko. Sofern nicht explizit etwas anderes benannt ist, werden die Begriffe Kreditrisiko und Ausfallrisiko synonym behandelt.

Bonitätssensitiver Finanztitel. Unter einem bonitätssensitiven Finanztitel wird jedes Finanzinstrument verstanden, welches kreditrisikobehaftet ist. Da im Rahmen dieser Arbeit Ausfallrisiken im Vordergrund stehen, bezeichnet der Begriff „bonitätssensitiver Finanztitel“ grundsätzlich ein ausfallrisikobehaftetes Finanzinstrument. Unter ausfallrisikobehafteten Finanzinstrumente werden in dieser Arbeit insbesondere Kredite, Anleihen und Derivate verstanden, wobei die gewonnenen Erkenntnisse auch auf jedes andere ausfallrisikobehaftete Finanzinstrument angewendet werden können.

Kreditrisikomodell. Betrachtet man beispielsweise ein Kreditinstitut, so ist es für dieses von größtem Interesse über die Wertentwicklung innerhalb des eigenen Kreditportfolios informiert zu sein. Hierbei interessieren zum Einen die Gewinnmöglichkeiten, um die potentiellen Renditen auf das eingesetzte Kapital einschätzen zu können, und zum Anderen das inhärente Verlustrisiko, um ausreichende Eigenkapitalreserven zu Deckung der Verluste bereitstellen zu können. Da die Wertentwicklung der Einzeltitel sowie des aggregierten Kreditportfolios des Kreditinstituts unter Umständen von existentieller Wichtigkeit sein kann, ist es notwendig die Wertentwicklung aufgrund des inhärenten Kreditrisikos präzisieren, differenzieren und quantifizieren zu können.⁸ Hierfür dienen sogenannte Kreditrisikomodelle. Unter einem Modell wird im Allgemeinen „eine strukturgleiche bzw. strukturähnliche Abbildung eines Realitätsausschnitts“ verstanden.⁹ Durch die Reduktion der Komplexität der Realität sollen wesentliche Ursache-Wirkungs-Zusammenhänge aufgezeigt werden. Die zur Reduktion der Komplexität notwendigerweise zu treffenden Annahmen können unter Umständen jedoch zu realitätsverzerrenden Modellergebnissen führen. In der Regel werden zur Quantifizierung der Kreditrisiken innerhalb eines bestimmten Zeithorizonts – dem sogenannten Risikohorizont – mathematische Modelle verwendet. Hierbei steht insbesondere die Vorwegnahme der zukünftigen Entwicklung der kreditrisikobehafteten Finanztitel im Vordergrund. Ein alternativer Ansatz zu den mathematischen Modellen stellt die Übertragung empirischer Beobachtungen von Vergleichstiteln auf die gegebene Problemstellung dar. Im Folgenden werden nur die mathematischen Kreditrisikomodelle berücksichtigt sowie diese

⁶ Vgl. Burghof, Hans-Peter et al.: Kreditrisiken und Kreditmärkte, in: Burghof, Hans-Peter et al.: Kreditderivate – Handbuch für die Bank und Anlagepraxis. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2005. S. 5f.

⁷ Vgl. Cremers, Heinz et al.: Risikosteuerung mit Kreditderivaten unter besonderer Berücksichtigung von Credit Default Swaps. Frankfurt School of Finance & Management Working Paper Series No. 80, Frankfurt, 2007. S.9

⁸ Vgl. Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S.110

⁹ Vgl. Jortzik, Stephan: Semi-analytische und simulative Kreditrisikomessung synthetischer Collateralized Debt Obligations bei heterogenen Referenzportfolios. Dissertation an der Universität Göttingen, Universität Göttingen: Göttingen, 2005. S. 59

auf ihre empirische Tauglichkeit analysiert. Für die Vorwegnahme der zukünftigen Entwicklung der kreditrisikobehafteten Finanztitel müssen alle möglichen Umweltzustände bzw. Einflussfaktoren berücksichtigt werden, welche während des Zeithorizonts auf den Wert der Finanztitel einwirken können. Die für das Kreditrisiko relevanten Einflussfaktoren werden auch als „Kreditrisikofaktoren“ bezeichnet. Diese Kreditrisikofaktoren müssen identifiziert werden und auf geeignete Weise mit dem Wert der kreditrisikobehafteten Finanztitel verknüpft werden, so dass – unter sonst gleichen Bedingungen – eine Änderung des Kreditrisikofaktors eine möglichst realitätsnahe Änderung des Werts der kreditrisikobehafteten Finanztitel nach sich zieht. Ein wesentlicher Bestandteil bei dieser „Verknüpfung“ ist die Berücksichtigung der Eintrittswahrscheinlichkeiten der jeweiligen Umweltzustände. Als Ergebnis eines Kreditrisikomodells erhält man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung des Portfoliowerts innerhalb des Risikohorizonts.¹⁰ Anhand dieses Ergebnisses können Handlungsalternativen, wie beispielsweise der Kauf oder Verkauf von kreditrisikobehafteten Finanztiteln, abgeleitet werden. Bevor jedoch eine derartige Entscheidung auf Basis eines Kreditrisikomodells getroffen wird, sollten die getroffenen Annahmen sowie die Ergebnisse kritisch hinterfragt werden.

¹⁰ Vgl. Jortzik, Stephan: Semi-analytische und simulative Kreditrisikomessung synthetischer Collateralized Debt Obligations bei heterogenen Referenzportfolios. Dissertation an der Universität Göttingen, Universität Göttingen: Göttingen, 2005. S. 59f.

2. Modellüberblick

Im Folgenden soll ein Überblick über verschiedene Bewertungsansätze für bonitätssensitive Finanztitel anhand der in der Literatur verbreiteten Unterteilung zwischen Unternehmenswert- („Asset Value-“ oder „Asset-Based-Models“) und Intensitätsmodellen („Intensity-Based-Models“) gegeben werden. Unternehmenswertmodelle, welche oftmals auch als strukturelle Modelle („Structural Models“) bezeichnet werden, modellieren das Ausfallrisiko eines Unternehmens über die zeitabhängige Entwicklung von dessen Firmenwert im Verhältnis zu dessen Fremdkapital. Bei den Intensitätsmodellen, welche auch als „Reduced-Form-Models“ bezeichnet werden, wird der Ausfall eines Unternehmens dagegen durch einen exogenen Intensitätsprozess gesteuert. Darüber hinaus existieren hybride Kreditrisikomodelle, welche eine Mischung aus Unternehmenswertmodellen und Intensitätsmodellen darstellen. Diese bauen im Wesentlichen auf Unternehmenswertmodellen auf, wobei die hybriden Kreditrisikomodelle meist die für Unternehmenswertmodelle bedeutende Annahme vollständiger Information fallen lassen und gezielt Informationsdefizite berücksichtigen.

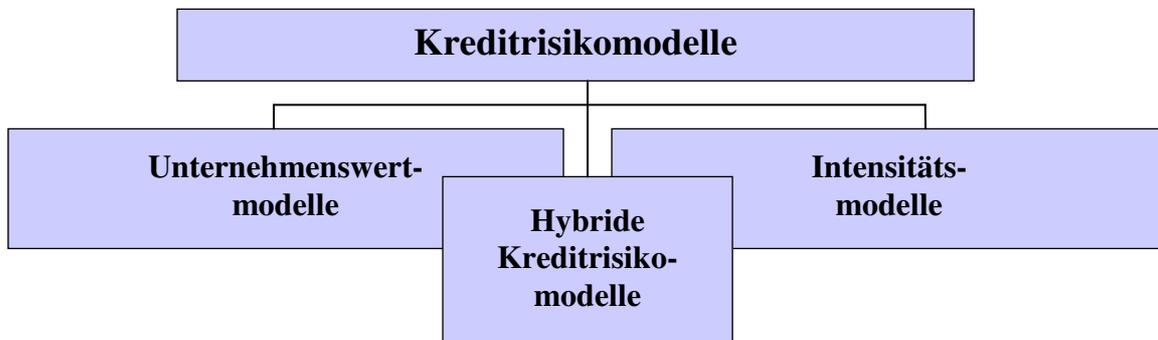


Abb. 1: Kreditrisikomodelle im Überblick¹¹

Unternehmenswertmodelle. Wie bereits beschrieben, bildet die Überlegung, dass letztlich der Wert der Aktiva eines Unternehmens maßgebend dafür ist, ob die Firma dazu in der Lage ist ihre Verbindlichkeiten bei Fälligkeit zurückzuzahlen, die Kernidee der Unternehmenswertmodelle. Ist der Wert der Aktiva bei Fälligkeit des Fremdkapitals geringer als die Forderung, so fällt diese in Höhe des Differenzbetrags zwischen Aktiva und dem Rückzahlungsbetrag des Fremdkapitals zumindest teilweise aus. Bei dem historisch ältesten Unternehmenswertmodell, dem klassischen optionstheoretischen Ansatz nach Merton, wird hierbei davon ausgegangen, dass das Fremdkapital eines Unternehmens lediglich aus einem einzigen ausfallrisikobehafteten Zerobond besteht.¹² Darüber hinaus werden die Vollkommenheit des Kapitalmarktes, die Gültigkeit des Modigliani-Miller Theorems, eine konstante und flache Zinsstruktur, die Möglichkeit kontinuierlichen Handels und eine

¹¹ Eigene Darstellung

¹² Vgl. Merton, Robert C.: On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates, in: Journal of Finance Vol. 29, 1974.

geometrisch Brownsche Bewegung für die Entwicklung des Firmenwerts angenommen.^{13,14} Die vielen restriktiven Annahmen dieses „Ausgangsmodells“ boten zahlreiche Möglichkeiten zur Weiterentwicklung des Ansatzes von Merton. So wurden im Zeitverlauf insbesondere die Annahmen einer flachen und konstanten Zinsstruktur, die Unmöglichkeit eines Ausfalls vor der Fälligkeit des Fremdkapitals, das Bestehen eines Zerobonds als einzige Fremdkapitalkomponente sowie die Modellierung der Firmenwertentwicklung über eine geometrisch Brownsche Bewegung kritisch hinterfragt und teilweise aufgehoben.

Intensitätsmodelle. Wie bereits erwähnt, erfolgt der Ausfall bei Intensitätsmodellen im Gegensatz zu Unternehmenswertmodellen nicht endogen aufgrund einer ökonomisch nachvollziehbaren Basis, sondern exogen über einen Ausfallprozess. Der erste Sprung eines Sprungprozesses, dem Ausfallprozess, entspricht hierbei dem Ausfallzeitpunkt. Da der Firmenwert nicht modelliert wird, ist bei Intensitätsmodellen die Definition der Ausgleichszahlung, der sog. Recovery-Zahlung, bei Eintritt eines Ausfallereignisses relevant. Hierbei ist sowohl eine Annahme über die Höhe als auch über den Zeitpunkt der Recovery-Zahlung zu treffen. Diese wird in der Regel entweder direkt beim Eintritt des Ausfallereignisses („Recovery at Default“) oder am Ende der Laufzeit des bonitätssensitiven Finanztitels („Recovery at Maturity“) geleistet. Als Höhe der Recovery-Zahlung kann ein fester Betrag, der Austausch des Zahlungsanspruchs der Gläubiger gegen einen exogen vorgegebenen Anteil eines ausfallrisikofreien Finanztitels mit ansonsten gleichen Spezifikationen, ein Prozentsatz des Nominals des ausfallrisikobehafteten Finanztitels oder ein Anteil des Marktwertes des bonitätssensitiven Finanztitels direkt vor dem Ausfallzeitpunkt definiert werden.¹⁵ Auch die Intensitätsmodelle basieren auf mehreren Annahmen, wobei die Anzahl der Annahmen aufgrund des zugrundeliegenden nicht-ökonomisch begründeten Modells deutlich geringer ist als bei den Unternehmenswertmodellen. Neben den Annahmen über die Recovery-Zahlung muss bei Intensitätsmodellen auch eine Annahme über die Modellierung des Zinssatzes getroffen werden. Darüber hinaus ist es notwendig eine Annahme über die sog. Intensitätsrate, der exogen gegebenen Ausfallrate, zu treffen.

Hybride Kreditrisikomodelle. Hybride Kreditrisikomodelle können diverse Ausprägungen haben. Grundsätzlich basieren diese jedoch auf Unternehmenswertmodellen und führen einen Unsicherheitsfaktor ein, welcher meist in einem Informationsdefizit begründet ist. Durch diesen Informationsdefizit kann dem Ausfallzeitpunkt eine stochastische Intensität zugeordnet werden und bietet somit eine ökonomische Rechtfertigung für Intensitätsmodelle.¹⁶ Dieser

¹³ Die Annahme eines vollkommenen Marktes beinhaltet z.B. die Abwesenheit von Transaktionskosten und Steuern, die beliebige Teilbarkeit aller Finanztitel, eine atomistische Marktstruktur, einen identischen Soll- und Habenzinssatz und die Möglichkeit von Leerverkäufen.

¹⁴ Vgl. Grundke, Peter: Modellierung und Bewertung von Kreditrisiken. Dissertation an der Universität zu Köln. Der Deutsche Universitätsverlag: Wiesbaden, 2003. S. 8f.

¹⁵ Vgl. ebd., S. 17

¹⁶ Vgl. ebd., S. 20

Informationsdefizit kann beispielsweise in der Höhe der Ausfallschranke, dem Firmenwert oder aber dem Eintritt einer zukünftigen Verbindlichkeit in unbekannter Höhe liegen.

Alle drei Modelltypen können sowohl zur Modellierung des Kreditrisikos eines einzelnen bonitätssensitiven Finanztitels als auch im Portfoliofall eingesetzt werden. Im Folgenden wird ausschließlich auf die Modellierung des Kreditrisikos im Portfoliofall eingegangen. Hinsichtlich der Modellierung des Kreditrisikos eines einzelnen bonitätssensitiven Finanztitels wird auf das Frankfurt School Working Paper No. 126 verwiesen.

3. Modellierung des Kreditrisikos im Portfoliofall

Zielsetzung der Modellierung des Kreditrisikos im Portfoliofall ist es das gemeinsame Ausfallverhalten mehrerer Kreditnehmer zu analysieren, um darüber beispielsweise Verlustverteilungen ermitteln oder Kreditderivate, welche sich auf mehrere Kreditnehmer beziehen, bewerten zu können. Hierzu ist es von besonderer Bedeutung die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit von mehreren Kreditnehmern zu quantifizieren. Eine separate Betrachtung des Portfoliofalls ist notwendig, da das Ausfallrisiko mehrerer Kontrahenten nicht additiv miteinander verknüpft werden kann. Vielmehr müssen im Portfoliofall Ausfallabhängigkeiten bzw. Ausfallkorrelationen der individuellen Kreditnehmer zueinander berücksichtigt werden. Ein möglicher Ansatz zur Modellierung der Ausfallabhängigkeit zwischen mehreren Kreditnehmer besteht darin das Verhalten von – im simpelsten Fall – zwei Kreditnehmern zueinander zu analysieren und anhand dessen eine Abhängigkeitsstruktur zu schätzen. Diese Vorgehensweise soll im Folgenden als „direkte“ Bestimmung der Ausfallabhängigkeit bezeichnet werden.

Direkte Bestimmung der Ausfallabhängigkeit. Diese könnte beispielsweise über die Beobachtung zweier Unternehmen über einen langen Zeitraum unter sich nicht ändernden Rahmenbedingungen erfolgen. Dabei würde für jede Periode das relevante Ergebnis („Ausfall“ oder „kein Ausfall“) festgehalten und anhand dessen die Ausfallabhängigkeit geschätzt werden. Wie dieses Beispiel verdeutlicht, lässt sich dies in der Praxis nicht umsetzen, da es einerseits an den Anforderungen genügenden Zeitreihen mangelt und andererseits der Ausfall eines Unternehmens dazu führt, dass dieses nicht mehr existent ist und somit keine Möglichkeit besteht weitere Daten in den Folgejahren zu erheben.¹⁷ Man behilft sich bei diesem Problem beispielsweise dadurch, dass Gruppen gleichartiger Unternehmen, d.h. zum Beispiel gleichartig hinsichtlich des Sektors, der Ratingklasse, etc., untersucht werden. Offensichtlich führt diese Alternative in der Praxis zu vergleichbaren Problemen hinsichtlich der Erstellung entsprechender Zeitreihen. Eine weitere Möglichkeit diese Problematik zu beheben, besteht darin, dass anstelle des Versuchs Ausfallabhängigkeiten und somit Ausfallkorrelationen zu schätzen, eine Korrelation von Größen, die in direktem Zusammenhang mit der Bonität der betrachteten Unternehmen stehen und relativ leicht am Markt beobachtbar sind, zu bestimmen.¹⁸ Derartige Korrelationen werden dementsprechend als „Asset-Korrelationen“ bezeichnet und sind strikt von den Ausfallkorrelationen abzugrenzen. Ein weiterer Ansatz liegt in der „indirekten“ Bestimmung der Ausfallabhängigkeit.

Indirekte Bestimmung der Ausfallabhängigkeit. Da empirische Untersuchungen belegen, dass ein Zusammenhang zwischen der wirtschaftlichen Lage und der Ausfallrate von Unternehmen besteht, versucht man sich dies im Rahmen der Modellierung von Abhängigkeitsstrukturen von einzelnen Kreditnehmern zueinander zu nutzen zu machen. Wie

¹⁷ Vgl. Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 120

¹⁸ Ebenda.

derartige Studien zeigen, führt eine schlechte konjunkturelle Lage etwas zeitversetzt zu einer Steigerung der Ausfallrate und eine gute konjunkturelle Lage zu zukünftig sinkenden Ausfallraten.¹⁹ Diese Abhängigkeit wird als sog. „systematische Ausfallabhängigkeit“ bezeichnet. Da jedoch nicht alle Unternehmen gleichermaßen von den Einflüssen einer schlechten konjunkturellen Lage betroffen sind, existiert offensichtlich neben dieser nachgewiesenen Abhängigkeit eine unternehmensspezifische Resistenz gegenüber dem makroökonomischen Umfeld, welche je nach Unternehmen mehr oder weniger stark ausgeprägt ist und als „idiosynkratische Ausfallabhängigkeit“ bezeichnet wird. Für die Modellierung bedeutet dies, dass einerseits die systematische Ausfallabhängigkeit durch die Einführung von makroökonomischen Schocks bzw. Umweltzuständen, welche alle Unternehmen gleichermaßen betreffen, und andererseits die idiosynkratische Ausfallabhängigkeit für jedes Unternehmen individuell modelliert wird.²⁰ Durch die Modellierung dieser beiden Abhängigkeiten, welche keine direkten Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Unternehmen darstellen, wird indirekt auch die Abhängigkeit zwischen verschiedenen Unternehmen modelliert. In den in diesem Kapitel behandelten Modellen erfolgt die Modellierung der Abhängigkeit entweder durch eine Kombination der direkten mit der indirekten Modellierung (im Rahmen der Unternehmenswertmodelle) oder lediglich durch eine indirekte Modellierung (im Rahmen der Intensitätsmodelle). Dementsprechend werden die beiden grundlegenden Modelltypen sowie die hybriden Kreditrisikomodelle im Folgenden separat analysiert.

Makroökonomische und mikroökonomische Abhängigkeit. Da bei der indirekten Bestimmung der Ausfallabhängigkeit die Abhängigkeit gegenüber dem makroökonomischen Umfeld im Vordergrund steht, soll im Folgenden diese Abhängigkeit als „makroökonomische Abhängigkeit“ bezeichnet werden. In der englischsprachigen Literatur wird diese meist als „cyclical dependence“ bezeichnet. Neben dieser makroökonomischen Abhängigkeit versuchen neuere Modelle zusätzlich die besondere Abhängigkeitsstruktur einzelner Unternehmen zu bestimmten anderen Unternehmen einzubeziehen. Unter „besondere Abhängigkeitsstruktur“ wird verstanden, dass der Ausfall eines Unternehmens durch besondere Faktoren, wie beispielsweise durch (Handels-)Kreditbeziehungen oder durch juristische Beziehungen (z.B. Mutter-Tochter-Verhältnis), die Ausfallwahrscheinlichkeit eines anderen Unternehmens beeinflusst. So kann beispielsweise der Ausfall des Hauptabnehmers eines Lieferanten dazu führen, dass selbiger ebenfalls ausfallgefährdet ist. Derartige Abhängigkeiten sollen im Folgenden als „mikroökonomische Abhängigkeiten“ bezeichnet werden. Aufgrund des negativen Effekts, den ein Ausfall auf ein oder mehrere andere Unternehmen haben kann, wird diese Abhängigkeit in der englischsprachigen Literatur oftmals als „contagion effect“ bezeichnet.²¹ Darüber hinaus ist offensichtlich, dass der, durch

¹⁹ Vgl. Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 123

²⁰ Vgl. Giesecke, Kay: A Simple Exponential Model for Dependent Defaults, in: Journal of Fixed Income Vol. 13, 2003. S. 3f.

²¹ Vgl. Giesecke, Kay et al.: Cyclical Correlations, Credit Contagion, and Portfolio Losses. Ithaca, USA: Cornell University sowie Berlin: Technische Universität Berlin, 2003. S. 2f.

Veränderungen des makroökonomischen Umfelds, ausgelöste Effekt durch die mikroökonomische Abhängigkeit verstärkt werden kann.²²

Da die Berücksichtigung der mikroökonomischen Abhängigkeit meist direkt in die Modelle, welche die makroökonomische Abhängigkeit modellieren, implementierbar ist, sollen im Rahmen dieses Kapitels verschiedene Möglichkeiten zur Einbeziehung der mikroökonomischen Abhängigkeit aufgezeigt werden, wobei jedoch der Fokus auf die Beschreibung der Modellierung der makroökonomischen Abhängigkeit gelegt wird.

3.1 Copula als Abhängigkeitsmaß

Als Maß für die Ausfallabhängigkeit zwischen mehreren Unternehmen kann die (lineare) Korrelation dienen. Obwohl diese einerseits intuitiv verständlich und relativ leicht bestimmbar ist, ist deren Verwendung zur Abbildung nicht-linearer Zusammenhänge, wie sie bei der Modellierung von Ausfallabhängigkeiten wahrscheinlich sind, nicht geeignet. Die Modellierung nicht-linearer Abhängigkeiten erfolgt über sog. Copulae. Da diese die Grundlage für die Modellierung von Ausfallabhängigkeiten darstellen, sollen diese im Vorfeld zu der Modellierung der Abhängigkeiten im Rahmen der einzelnen Modelltypen näher betrachtet werden.

Copula. Die Copula ist ein Abhängigkeitsmaß, welches in der Lage ist nicht-lineare Zusammenhänge zu erfassen, Aussagen über Abhängigkeiten im äußeren Bereich der Verteilungen zu treffen und sogar eine konkrete Modellierung der Randverteilungen erlaubt. Letzteres ist bei der Modellierung extremer Ereignisse, wie bei der Betrachtung von gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeiten in einem Kreditportfolio, von besonderem Interesse.²³ Während die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit mehrerer Unternehmen sowohl die individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten der Unternehmen als auch die Wahrscheinlichkeit eines gemeinsamen Ausfalls umfasst, ermöglichen Copulae die Abhängigkeitsstruktur möglicher Ausfälle isoliert zu betrachten. Eine Copula-Funktion entspricht somit exakt der Funktion, welche den Zusammenhang der individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten p_i zu der gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeit p herstellt. Ist p kontinuierlich, so existiert nur eine Copula.²⁴ Formal gilt für eine Copula C also:

$$(1) \quad p(T_1, T_2) = C(p_1(T_1), p_2(T_2))$$

Bei einer gegebenen gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeit p kann die Copula über die generalisierte Inverse der individuellen Ausfallwahrscheinlichkeit ermittelt werden:

²² Vgl. Giesecke, Kay et al.: Cyclical Correlations, Credit Contagion, and Portfolio Losses. Ithaca, USA: Cornell University sowie Berlin: Technische Universität Berlin, 2003. S. 2f.

²³ Vgl. Schwarz, Christian: Eine gruppierte elliptische Copula und ihre Anwendung im Kreditrisikomanagement. Diplomarbeit an der Technischen Universität München - Zentrum Mathematik. München, 2005. S. 65f.

²⁴ Vgl. Cherubini, Umberto et al.: Copula Methods in Finance. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2004. S. 49ff.

$$(2) C(u, v) = p(p_1^{-1}(u), p_2^{-1}(v)) \text{ mit } u \text{ und } v \in [0,1].^{25}$$

Grundsätzlich existiert eine Vielzahl von Copulae. Die meisten Copulae berücksichtigen jedoch nur den bivariaten Fall. Die Menge an multivariaten Copulae ist demgegenüber relativ gering. Typische Probleme bei der Betrachtung von Kreditportfolien lassen sich jedoch nicht durch Abbildung des bivariaten Zusammenhangs lösen, weshalb im Folgenden multivariate Copulae verwendet werden, auch, wenn diese zur besseren Übersichtlichkeit im bivariaten Fall dargestellt werden sollen.²⁶

Darüber hinaus kann man Copulae in zwei Hauptklassen unterteilen – die sogenannten elliptischen Copulae und die archimedischen Copulae. Elliptische Copulae tragen ihren Namen, da mit ihnen nur symmetrische Zusammenhänge abgebildet werden können, während mit archimedischen Copulae auch asymmetrische Abhängigkeiten in den Rändern der Verteilungen abgebildet werden können.²⁷

Elliptische Copulae. Die wohl bekannteste Copula ist die sogenannte Normal- oder Gauß-Copula, welche zur Familie der elliptischen Copulae gehört. Dieser liegt die Standard-Normalverteilung zugrunde. Im bivariaten Fall ist die Gauß-Copula definiert über:

$$(3) C_r^{Ga}(u, v) = \Phi_2(r, \Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \cdot e^{\frac{2rxy-x^2-y^2}{2(1-r^2)}} dx dy$$

mit Korrelationsparameter r .

Eine weitere elliptische Copula ist die sog. t-Copula, welcher die t-Verteilung zugrunde liegt. In bivariater Form ergibt sich diese durch:

$$(4) C_{r,w}^t(u, v) = t_2(r, w, t_w^{-1}(u), t_w^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{t_w^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_w^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \cdot e^{\left(\frac{x^2-2rxy+y^2}{w(1-r^2)}\right)^{\frac{w+2}{2}}} dx dy$$

mit Korrelationsparameter r und w Freiheitsgraden. Der wesentliche Unterschied zwischen der Gauß-Copula und der t-Copula liegt darin, dass bei der t-Copula die Abhängigkeit in den Rändern bei wenigen Freiheitsgraden deutlich stärker ausgeprägt ist als bei der Gauß-Copula.

Nachfolgende Abbildungen sollen am Beispiel der Gauß-Copula die Modellierung der Abhängigkeitsstrukturen bei elliptischen Copulae graphisch veranschaulichen:

²⁵ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 17; hinsichtlich einer Einführung in Copulae vgl. Nelson, Roger: An Introduction to Copulas. New York: Springer Verlag, 1999.

²⁶ Vgl. Koziol, Philipp: Auswahl von Copulas zur Bewertung von Basketkreditderivaten. Vallendar, 2005. S. 667

²⁷ Vgl. Beck, Andreas et al.: Copulas im Risikomanagement, in: Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen Ausgabe 14, 2006. S. 4

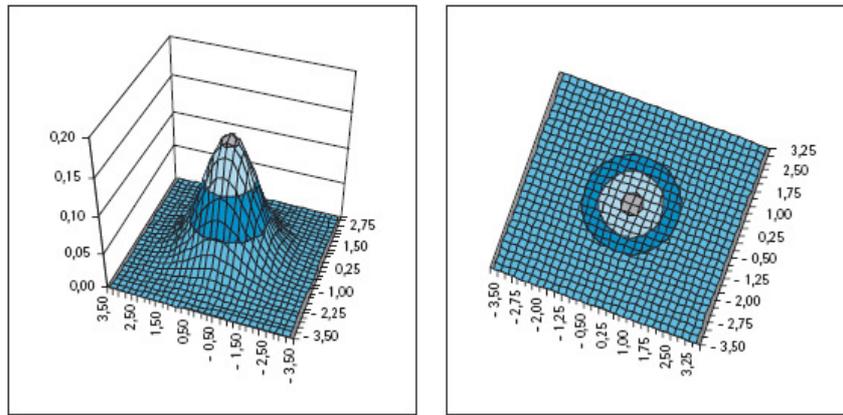


Abb. 2: Unkorrelierte Gauß-Copula mit normalverteilten Randverteilungen

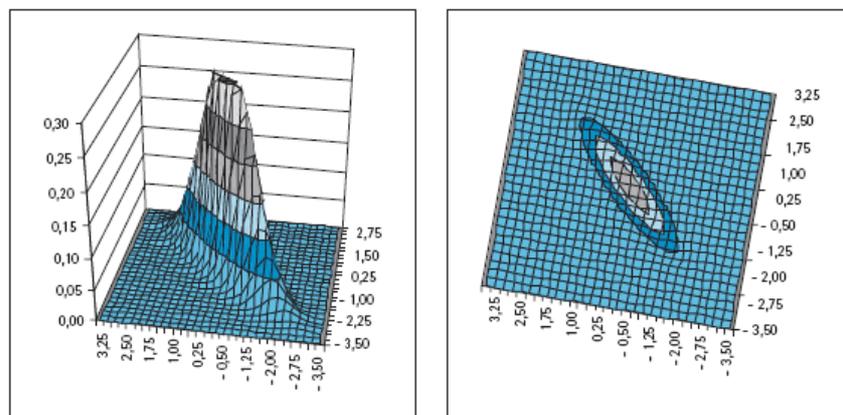


Abb. 3: Gauß-Copula mit normalverteilten Randverteilungen und Korrelationskoeffizienten $r = 0,9$

Die obigen Abbildungen machen deutlich, dass elliptische Copulae, wie die Gauß-Copula, ausschließlich die Simulation linearer Abhängigkeiten in den Rändern der Verteilungen ermöglichen.

Archimedische Copulae. In der Klasse der archimedischen Copulae sind insbesondere die Gumbel- und die Clayton-Copula zu nennen. Die Gumbel-Copula ergibt sich in bivariater Form anhand:

$$(5) C_r^{Gumbel}(u, v) = e^{-\left[(-\log u)^r + (-\log v)^r\right]^{1/r}} \quad \text{mit Korrelationsparameter } r \geq 1.$$

Die Clayton-Copula ist im bivariaten Fall definiert durch:

$$(6) C_r^{Clayton}(u, v) = \max\left(\left(u^{-r} + v^{-r} - 1\right)^{-1/r}, 0\right) \quad \text{mit Korrelationsparameter } r > 0.$$

Nachfolgende Abbildung soll am Beispiel der Gumbel-Copula die Modellierung der Abhängigkeitsstrukturen bei archimedischen Copulae graphisch veranschaulichen:

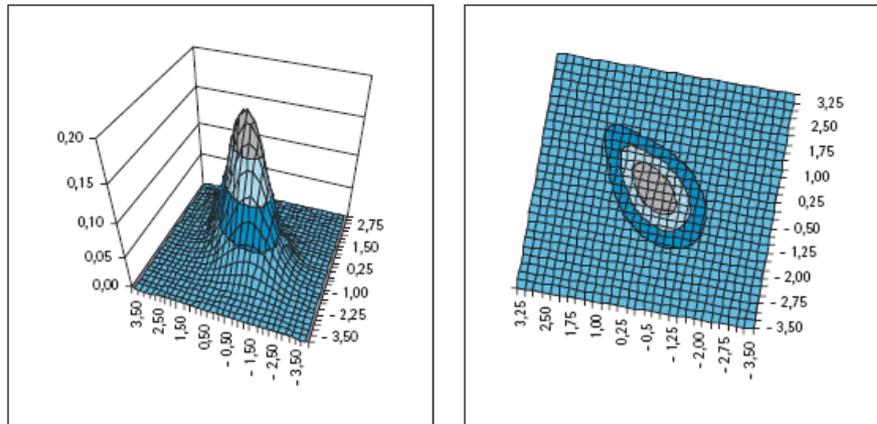


Abb. 4: Gumbel-Copula mit normalverteilten Randverteilungen und Korrelationsparameter $r = 1,5$

Die stärkere Korrelation der Zufallsvariablen in der linken oberen Ecke als in der rechten unteren Ecke macht deutlich, dass archimedische Copulae – im Gegensatz zu elliptischen Copulae – die Simulation asymmetrischer Abhängigkeiten in den Rändern der Verteilungen ermöglichen.

Spezialfälle von Copulae. Als Spezialfälle von Copulae sind darüber hinaus die sog. Produkt-Copula sowie die Hoeffding-Fréchet-Grenzen zu nennen. Die Hoeffding-Fréchet-Grenzen bilden die beiden extremsten Abhängigkeitsstrukturen – die perfekt negative Abhängigkeit („Kontramonotonie“) sowie die perfekt positive Abhängigkeit („Komonotonie“) – ab. Der Spezialfall, welcher in der Mitte dieser beiden Extrema liegt, entspricht der Unabhängigkeit der Verteilungen voneinander. Wenn die Verteilungen unabhängig voneinander sind, wird dieser Zusammenhang durch die Produkt-Copula beschrieben. Die Produkt-Copula trägt ihren Namen, weil die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen durch simple Multiplikation der einzelnen Verteilungsfunktionen erreicht werden kann. Dementsprechend gilt für die Produkt-Copula im bivariaten Fall:

$$(7) C^\perp(u, v) = u \cdot v$$

bzw. für die gemeinsame Verteilungsfunktion der Verteilungen $H(x)$ und $G(x)$:

$$(8) F(x, y) = C^\perp(G(x), H(y))$$

Für die gemeinsame Verteilungsfunktion bei Kontramonotonie (Hoeffding-Fréchet-Untergrenze) gilt:

$$(9) F(x, y) = \max(G(x) + H(y) - 1, 0)$$

Entsprechend gilt für die gemeinsame Verteilungsfunktion bei Komonotonie (Hoeffding-Fréchet-Obergrenze):

$$(10) F(x, y) = \min(G(x), H(y))$$

Sämtliche Copulae liegen folglich zwischen den beiden Hoeffding-Fréchet-Grenzen.²⁸

3.2 Unternehmenswertmodelle

3.2.1 Einführung der makroökonomischen Abhängigkeit anhand des Bernoulli-Mischungsmodells

Eine weit verbreitete Möglichkeit Verlustverteilungen zu modellieren, welche auf makroökonomische Abhängigkeiten der einzelnen Portfoliopositionen zurückzuführen sind, stellt das sogenannte „Bernoulli-Mischungsmodell“ dar.²⁹ Hierzu wird bei einem fixierten Zeithorizont T für jeden einzelnen Kreditnehmer i ein Ausfallindikator $Y_i = 1_{\{\tau_i \leq T\}}$ über Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen bestimmt. Entsprechend beschreibt $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ den Vektor der Zufallsvariablen Y_i mit der Ausfallwahrscheinlichkeit $p_i = P[Y_i = 1]$.

Um die Funktionsweise des Bernoulli-Mischungsmodells zu verdeutlichen soll zuerst ein Spezialfall betrachtet werden, welchem die (unrealistischen) Annahmen zugrunde gelegt werden, dass sämtliche Firmen in dem Portfolio unabhängig sind und, dass alle Unternehmen des Portfolios dieselbe Ausfallwahrscheinlichkeit haben. Diese Annahmen führen dazu, dass die Abfolge der Zufallsvariablen Y_i dem klassischen Bernoulli-Experiment entsprechen. Die Summe der Verluste $L_n = Y_1 + \dots + Y_n$ für $n \geq 1$, wobei hierbei von einem normierten Kreditportfolio, d.h. einem Portfolio mit Finanztiteln, welche mit einem Nominal von „eins“ („Exposure at Default“ (*EAD*)) ausgestattet sind und einen Totalverlust bei Eintritt eines Ausfallereignisses („Loss Given Default“ (*LGD*)) erleiden, ausgegangen wird, ist entsprechend mit dem Parametervektor (n, p) binomialverteilt:

$$(11) P[L_n = k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \text{ mit } k \leq n \text{ und } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Da die Annahme, dass der Ausfall von Unternehmen unabhängig erfolgt, unrealistisch ist, wird diese Annahme im Folgenden aufgehoben. Vielmehr soll die Ausfallwahrscheinlichkeit von dem jeweiligen realisierten makroökonomischen Umfeld abhängig und somit als zufällig angenommen werden. Um die Unsicherheit über die Höhe von p auszudrücken, soll F als

²⁸ Vgl. Cherubini, Umberto et al.: Copula Methods in Finance. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2004. S. 49ff.

²⁹ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 21

Verteilung von p im Intervall $[0,1]$ eingeführt werden. Für die Verlustverteilung ergibt sich somit als Modifikation von Gleichung (11):³⁰

$$(12) P[L_n = k] = \binom{n}{k} \cdot \int_0^1 z^k \cdot (1-z)^{n-k} dF(z) \text{ mit } k \leq n$$

Formel (12) beschreibt eine Mischung von binomialen Wahrscheinlichkeiten mit einer „Mischverteilung“ F . Mit anderen Worten werden zuerst die Ausfallwahrscheinlichkeiten p anhand der Verteilung F bestimmt. Nachdem die Höhe der Ausfallwahrscheinlichkeiten auf diese Weise festgelegt wurden, können die Unternehmensausfälle als unabhängig betrachtet werden und somit die gesamte Anzahl an Ausfällen anhand der Binomialverteilung mit Parameter p bestimmt werden.³¹ Dieser Vorgehensweise verdankt das Bernoulli-Mischungsmodell seinen Namen.

Die Grundidee des Bernoulli-Mischungsmodells bildet die Basis für das nachfolgend eingeführte Faktor-Modell, welches selbst ein Bernoulli-Mischungsmodell ist.

3.2.1.1 Modellierung des klassischen optionstheoretischen Ansatzes anhand eines Faktor-Modells bei homogenen Kreditportfolien

Im Folgenden wird der Portfoliofall für Unternehmenswertmodelle aus Vereinfachungsgründen im Rahmen des klassischen optionstheoretischen Ansatzes untersucht. Die Übertragung auf andere Unternehmenswertmodelle ist analog möglich.

Struktureller Rahmen. Betrachtet man homogene Portfolien, so ist die Abfolge der Zufallsvariablen Y_i austauschbar, d.h. der Vektor (Y_1, \dots, Y_k) hat für jede Permutation des Indikators $(1, \dots, k)$ dieselbe Verteilung. Darüber hinaus müssen die zufälligen Ausfallwahrscheinlichkeiten p aus Gleichung (12) als vom makroökonomischen Umfeld abhängige, bedingte Ausfallwahrscheinlichkeiten modelliert werden. Wird das aktuelle Stadium des makroökonomischen Umfelds durch die Zufallsvariable X – dem sog. „Makro-Faktor“ – ausgedrückt, so wird die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit über Gleichung (13) definiert:

$$(13) p(X) = E[Y_i | X] = P[Y_i = 1 | X]$$

Die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit $p(X)$ ist entsprechend ebenfalls eine Zufallsvariable, deren Verteilung von der Verteilung von X abhängig ist. Auf diese Weise kommt die Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit von der aktuellen Phase des Konjunkturzyklus

³⁰ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 21

³¹ Ebenda.

zum Ausdruck.³² Für die konkrete Berechnung der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit beim klassischen optionstheoretischen Ansatz sind folgende Überlegungen anzustellen:

Bei Unternehmenswertmodellen kommt es zum Eintritt eines Ausfallereignisses, wenn der Firmenwert unter einen bestimmten Wert fällt. Beim klassischen optionstheoretischen Ansatz tritt das Ausfallereignis ein, wenn der Firmenwert kleiner ist als das Nominal des Fremdkapitals bei Fälligkeit. Entsprechend gilt:

$$(14) \quad A_i = W_1^i = \frac{\ln\left(\frac{V_1^i}{V_0^i}\right) - m_i}{\sigma_i} < \frac{\ln\left(\frac{K_i}{V_0^i}\right) - m_i}{\sigma_i} = B_i,$$

wobei A_i dem standardisierten Firmenwert und B_i dem standardisierten Nominal des Fremdkapitals entspricht.³³ Der Vektor (A_1, \dots, A_n) ist normalverteilt mit Mittelwertvektor null und Kovarianzmatrix $\Sigma = (\rho_{ij})$, wobei $\rho_{ij} = \text{Cov}(W_1^i, W_1^j)$ die Korrelation der Firmenwerte (sog. „Asset Korrelation“) beschreibt.³⁴ Die Ausfallabhängigkeit zwischen zwei Firmen wird also dadurch erzielt, dass eine Korrelation bei der Entwicklung der Firmenwerte der beiden Unternehmen unterstellt wird.³⁵ Da homogene Portfolien betrachtet werden, gilt ρ_{ij} bei $i \neq j$ und $\rho_{ij} = 1$ bei $i = j$ für die Korrelationsmatrix der Firmenwerte. Mit anderen Worten heißt das, dass die Korrelation der Firmenwerte zwischen irgendwelchen zwei Firmen der konstanten Korrelation ρ_{ij} entspricht.

Einführung des Ein-Faktor Modells. Modernste Kreditrisikomodelle basieren auf dem Faktor-Ansatz um Ausfallabhängigkeiten zu modellieren. Hierbei nur einen einzigen Faktor zu verwenden, ein sog. Ein-Faktor Modell, entspricht der gängigen Marktpraxis. Der ökonomische Hintergrund des Modells liegt darin, dass der standardisierte Firmenwert W_1^i des Kreditnehmers i von einem Marktfaktor, wie beispielsweise dem jeweiligen Stadium eines Konjunkturzyklus, abhängig ist. Der Marktfaktor entspricht damit dem bereits beschriebenen „Makro-Faktor“. Die Korrelation ρ gibt dabei die Stärke des Zusammenhangs zwischen der Firmenwertentwicklung irgendeines Unternehmens und dem Makro-Faktor X an.³⁶ Das lineare Ein-Faktor Modell, dessen erstmalige Einführung auf Vasicek’s Arbeit von

³² Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 22f.

³³ Ebenda.

³⁴ Beim First-Passage Ansatz erfolgt der Ausfall, wenn der Firmenwert vor Fälligkeit unter die Ausfallschranke DB_i fällt. Entsprechend gilt:

$$A_i = \min_{s \leq T} (m_i s + \sigma_i W_s^i) < \ln\left(\frac{DB_i}{V_0^i}\right) = B_i, \quad \text{wobei } A_i \text{ dem Minimum des logarithmierten Firmenwerts des}$$

Unternehmens i zum Zeitpunkt T und B_i der standardisierten Ausfallschranke entspricht. Der Vektor (A_1, \dots, A_n) ist invers normalverteilt mit Mittelwertvektor null und Kovarianzmatrix $\Sigma = (\rho_{ij})$.

³⁵ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S.284

³⁶ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 286

1987 zurückgeht und daher oftmals auch als Vasicek-Modell bezeichnet wird, ergibt sich daher durch:³⁷

(15) $W_1^i = \sqrt{\rho} \cdot X + \sqrt{1-\rho} \cdot Z_i$, wobei $X \sim N(0,1)$ den systematischen und $Z_i \sim N(0,1)$ den unternehmensspezifischen, idiosynkratischen Faktor darstellen. Der Term $\sqrt{\rho} \cdot X$ bildet also das systematische Risiko und der Term $\sqrt{1-\rho} \cdot Z_i$ das idiosynkratische Risiko eines Unternehmens ab, wobei $\sqrt{\rho}$ bzw. $\sqrt{1-\rho}$ die jeweiligen Gewichtungsfaktoren darstellen und somit die Sensitivität des Unternehmens gegenüber der jeweiligen Risikokomponente beschreiben.³⁸ Obwohl sämtliche Firmenwerte mit dem Makro-Faktor X korreliert sind, erfolgt der Ausfall der einzelnen Kreditnehmer doch unabhängig voneinander und ist lediglich von der Realisation des Faktors X abhängig. Der Faktor Z_i ist dagegen komplett unabhängig. Entsprechend hat der Makro-Faktor bei einer Korrelation von „null“ keinerlei Auswirkungen auf den Firmenwert und somit auf die Ausfallwahrscheinlichkeit. In diesem Spezialfall ist es nur das unternehmensspezifische, idiosynkratische Risiko, welches das Ausfallrisiko bestimmt. Im gegenteiligen Spezialfall – also bei einer Korrelation von eins – wird das Ausfallrisiko eines Unternehmens nur durch den Makro-Faktor bestimmt.³⁹

Ein großer Vorteil des Ein-Faktor Modells ist es, dass die schwierig zu bestimmenden Modellparameter „Firmenwert“ und „Ausfallschranke“ im Ein-Faktor Modell nicht explizit bestimmt werden müssen. Vielmehr kann – wenn die Ausfallwahrscheinlichkeit p_i bereits aus Marktdaten hergeleitet werden konnte – die Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit einer Unterschreitung der Ausfallschranke B_i durch A_i der dann bereits bekannten Ausfallwahrscheinlichkeit p_i entspricht, genutzt werden, um B_i und A_i zu ermitteln. Auch, wenn für die Verteilung von A_i grundsätzlich jede Verteilungsannahme getroffen werden kann, so ist diese dennoch gemäß Formel (15) von den getroffenen Annahmen über die Verteilung von X sowie über die Verteilung von Z_i abhängig. Da beide entsprechend dem klassischen Ansatz nach Vasicek als standardnormalverteilt definiert wurden, folgt daraus, dass auch W_i bzw. A_i standardnormalverteilt ist, weshalb sich nachfolgend der gängigen Methode bedient wird, den absoluten Wert von A_i null zu setzen und A_i eine Standardnormalverteilung zugrunde zu legen. Bei einer abweichenden Definition der Verteilungen für X sowie für Z_i folgt daraus auch eine abweichende Definition der Verteilung von A_i .⁴⁰ Aus der Ausfallwahrscheinlichkeit der einzelnen Unternehmen $p_i = P[W_1^i < B_i] = \Phi(B_i)$ ergibt sich dann das standardisierte Nominal des Fremdkapitals als $B = \Phi^{-1}(p)$ für alle Unternehmen i .

Für die von X abhängige, bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit gilt demnach:

³⁷ Vgl. Vasicek, Oldrich: Probability of loss on loan portfolio. Working paper, KMV Corporation, 1987.

³⁸ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 23f.

³⁹ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 286

⁴⁰ Vgl. ebd., S. 284ff.

$$\begin{aligned}
 p(X) &= \mathbb{P}[W_1^i < B_i | X] = \mathbb{P}[\sqrt{\rho} \cdot X + \sqrt{1-\rho} \cdot Z_i < B_i | X] = \mathbb{P}\left[Z_i < \frac{B_i - \sqrt{\rho} \cdot X}{\sqrt{1-\rho}} \middle| X\right] \\
 (16) \quad &= \Phi\left(\frac{B_i - \sqrt{\rho} \cdot X}{\sqrt{1-\rho}}\right) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho} \cdot X}{\sqrt{1-\rho}}\right)
 \end{aligned}$$

Wie bereits beschrieben, resultiert aus der Verteilungsannahme für X und Z_i die Verteilungsannahme für W_i bzw. A_i . Wird die Verteilung von X allgemein als $Q(x)$ und die Verteilung von Z_i allgemein als $H(x)$ bezeichnet, so folgt daraus als Verteilung von W_i bzw. A_i die allgemeine Verteilung $G(x)$.⁴¹ Nachfolgende Gleichung dient als Verallgemeinerung von Formel (16):

$$\begin{aligned}
 p(X) &= \mathbb{P}[W_1^i < B_i | X] = \mathbb{P}[\sqrt{\rho} \cdot X + \sqrt{1-\rho} \cdot Z_i < B_i | X] = \mathbb{P}\left[Z_i < \frac{B_i - \sqrt{\rho} \cdot X}{\sqrt{1-\rho}} \middle| X\right] \\
 (17) \quad &= H\left(\frac{B_i - \sqrt{\rho} \cdot X}{\sqrt{1-\rho}}\right) = H\left(\frac{G^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho} \cdot X}{\sqrt{1-\rho}}\right)
 \end{aligned}$$

Wie Gleichung (16) bzw. (17) verdeutlichen, ist die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit sowohl von der individuellen Ausfallwahrscheinlichkeit der jeweiligen Firma als auch von der Korrelation des Firmenwerts vom Makro-Faktor abhängig. Darüber hinaus zeigt besagte Formel, dass die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit bei zunehmendem X abnimmt. Dementsprechend weisen hohe Werte der Zufallsvariablen X auf eine gesunde wirtschaftliche Lage und niedrige Werte der Zufallsvariablen X auf eine angespannte wirtschaftliche Lage hin.⁴²

Die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit ergibt sich über (16) durch:

$$(18) \quad \mathbb{P}[Y_1 = 1, \dots, Y_n = 1] = C(p_1, \dots, p_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho}x}{\sqrt{1-\rho}}\right)^n \cdot \Phi(x) dx$$

Die in Formel (18) beschriebene Abhängigkeitsstruktur wird auch als sogenannte „Ein-Faktor Gauß Copula“ bezeichnet.⁴³ Es ist zu beachten, dass die Abhängigkeitsstruktur austauschbar ist und lediglich von der Verteilungsannahme, welche Formel (16) zugrunde liegt, sowie von der Definition des Ein-Faktor Modells gemäß Gleichung (15) abhängt.

⁴¹ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 284ff.

⁴² Vgl.ebd., S. 24

⁴³ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 31

Da die Variable L_n in Abhängigkeit von der Höhe der Zufallsvariablen X binomialverteilt mit dem Parametervektor $(n, p(X))$ ist, ergibt sich für die Verlustverteilung in Anlehnung an Formel (12):⁴⁴

$$(19) \quad \mathbb{P}[L_n \leq k] = \sum_{i=1}^k \binom{n}{i} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (p(x))^i \cdot (1-p(x))^{n-i} \cdot \Phi(x) dx$$

Asymmetrische Abhängigkeitsstruktur. Die Abhängigkeitsstruktur der Ein-Faktor Gauß Copula ist aufgrund der symmetrischen Definition des Ein-Faktor Modells gemäß Gleichung (15) symmetrisch. Da manche Finanzinstrumente eine asymmetrische Korrelation der Firmenwerte zu dem Makro-Faktor benötigen, kann ein Austausch der Abhängigkeitsstruktur sinnvoll sein. Durch simplen Austausch des Ein-Faktor Modells kann diese asymmetrisch werden. Hierzu kann beispielsweise die folgende Definition des Ein-Faktor Modells dienen:

$$(20) \quad W_1^i = \rho X + \sqrt{1-\rho^2} \cdot Z_i$$

Die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit sowie die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit ergeben sich analog zu dem Formeln (16) und (18).⁴⁵

Bestimmung der (Grenz-)Verlustverteilung für $n \rightarrow \infty$. Im Folgenden soll die Verlustverteilung von großen Kreditportfolien, also $n \rightarrow \infty$, untersucht werden. Geht man von einem prozentualen Portfolioverlusts L_n/n aus, so folgt daraus für den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz:⁴⁶

$$(21) \quad E\left[\frac{L_n}{n} \middle| X\right] = p(X) \text{ sowie } \text{Var}\left[\frac{L_n}{n} \middle| X\right] = \frac{1}{n} \cdot p(X) \cdot (1-p(X))$$

Anhand der Tschebyschow-Ungleichung lässt sich die obere Grenze für die Wahrscheinlichkeit ermitteln, bei welcher der prozentuale Portfolioverlust von der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit um mehr als den „Error“-Faktor $\varepsilon > 0$ abweicht.⁴⁷

$$(22) \quad \mathbb{P}\left[\left|\frac{L_n}{n} - p(X)\right| > \varepsilon \middle| X\right] \leq \frac{\text{Var}\left[\frac{L_n}{n} \middle| X\right]}{\varepsilon^2} = \frac{p(X) \cdot (1-p(X))}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Für den Erwartungswert für $n \rightarrow \infty$ ergibt sich somit:⁴⁸

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{L_n}{n} - p(X)\right| > \varepsilon\right] = 0 \text{ bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n} = p(X)$$

⁴⁴ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 24

⁴⁵ Vgl. ebd., S. 31

⁴⁶ Vgl. ebd., S. 25

⁴⁷ Ebenda.

⁴⁸ Ebenda.

Gleichung (23) drückt aus, dass für große Portfolien die Wahrscheinlichkeit, dass der prozentuale Portfolioverlust um mehr als ε von der bedingten Wahrscheinlichkeit abweicht, „null“ ist. Offensichtlich gilt dies jedoch nicht für jede denkbare Situation: geht man davon aus, dass sämtliche Firmen ausfallen, so wäre $L_n = n$ und wenn keine Firma ausfallen würde, entspräche $L_n = 0$. Da beide Situationen aufgrund der hohen Anzahl von Kreditnehmern in dem Portfolio mit einer Wahrscheinlichkeit von „null“ eintreten, sind diese irrelevant. Nach dem Gesetz der großen Zahlen konvergiert der prozentuale Portfolioverlust also mit einer Wahrscheinlichkeit von „eins“ gegen die bedingte Wahrscheinlichkeit:⁴⁹

$$(24) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n} = p(X)$$

Selbiges gilt auch, wenn die einzelnen Titel in dem Portfolio unterschiedliche Gewichtungen w_i haben, solange keine zu großen Einzeltitel in dem Portfolio existieren.

Da die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit von der Zufallsvariable X abhängig ist, ist auch die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit zufällig. Daraus folgt, dass der durchschnittliche Portfolioverlust in sehr großen Portfolien durch die Verteilung von X definiert ist und, dass die Volatilität von X dementsprechend die Volatilität der aggregierten Portfolioverluste beeinflusst. Darüber hinaus ist festzuhalten, dass sämtliches unternehmensspezifisches, idiosynkratisches Risiko „wegdiversifiziert“ wird. Lediglich das systematische Risiko, welches durch die Zufallsvariable X hervorgerufen wird, bleibt bestehen und lässt sich auch bei unendlich großen Kreditportfolien nicht „wegdiversifizieren“.⁵⁰ Diese Erkenntnis steht im Einklang mit den Erkenntnissen der Portfoliotheorie.

Für die Grenzverlustverteilung $F_{p,\rho}(x)$ bei großen Kreditportfolien gilt bei Einsetzen der Inversen von Formel (16) für p^{-1} :⁵¹

$$(25) \begin{aligned} F_{p,\rho}(x) &= \mathbb{P}\left[\frac{L_n}{n} \leq x\right] = \mathbb{P}[p(X) \leq x] = \mathbb{P}[X > p^{-1}(x)] = \Phi(-p^{-1}(x)) \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot (\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p))\right) \end{aligned} \quad \text{mit } x \in [0,1]$$

Die Grenzverlustverteilung ist somit lediglich von der individuellen Ausfallwahrscheinlichkeit eines Unternehmens p und der Korrelation der Vermögenswerte ρ abhängig.

⁴⁹ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 25

⁵⁰ Ebenda.

⁵¹ Vgl. Schönbucher, Philipp J.: Credit Derivates Pricing Models: Models, Pricing and Implementation. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd., 2003. S. 310f.

Beispiel

Die A-Bank, welche sich auf die Kreditvergabe an Unternehmen eines bestimmten Industriesektors spezialisiert hat, interessiert sich für die Risiken aus dem bestehenden Kreditportfolio. Aufgrund gravierender Bonitätsverschlechterungen der Kreditnehmer der A-Bank in der Vergangenheit befinden sich derzeit hauptsächlich Kredite an Non-Investment-Grade-geratete Unternehmen in einem aus einer Vertriebsaktion für standardisierte Kredite resultierenden Kreditportfolio. Wegen der schlechten Bonität der Kreditnehmer in diesem Portfolio möchte die A-Bank dieses Portfolio separat analysieren. Die standardisierten Kredite haben gemein, dass diese mit einem Nominal von 50 Geldeinheiten vergeben wurden und während der Laufzeit keine Tilgung erfolgt ($EAD = 50$). Die A-Bank verfügt über $n = 150$ derartiger Kredite an Non-Investment-Grade-geratete Unternehmen, deren Ausfallwahrscheinlichkeit sie auf $p_i = p_j = 3\%$ schätzt. Darüber hinaus geht sie von einer Korrelation der Firmenwerte zu dem Makro-Faktor in Höhe von $\rho = 10\%$ sowie bei Eintritt eines Ausfallereignisses von einer Recovery-Rate von 40% aus. Da die Restlaufzeit der Kredite ein Jahr beträgt, möchte die A-Bank für diesen Zeitraum den Expected Loss (EL), den Unexpected Loss (UL) sowie den Credit-Value at Risk ($CVaR$) bei einem Konfidenzniveau von $\alpha = 99,00\%$ von diesem homogenen Kreditportfolio bestimmen. Zuerst bestimmt sie dazu den Expected Loss, welcher dem Erwartungswert eines Verlustes entspricht, und den Unexpected Loss, welcher mit der Standardabweichung eines Verlustes identisch ist und erhält:

$$(26) \quad EL = E(L) = EAD \cdot (1 - Rec) \cdot p \cdot n = 135 \text{ Geldeinheiten}$$

bzw.

$$(27) \quad UL = \sigma(L) = EAD \cdot (1 - Rec) \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 62,6777 \text{ Geldeinheiten}$$

Anschließend berechnet sie über Formel (19) die Verlustverteilung, wobei der einzelne Verlust über $EAD \cdot LGD = 30$ Geldeinheiten bestimmt wird:⁵²

⁵² Die Berechnung anhand eines normierten Kreditportfolios mit $EAD = LGD = 1$ erfolgt analog.

Ausfälle k	Verlust L_k	Dichte $f(k)$	Vert.funktion $F(k)$
0	0	9,6111%	9,6111%
1	30	14,0042%	23,6153%
2	60	14,3200%	37,9352%
3	90	12,7791%	50,7144%
4	120	10,6758%	61,3902%
5	150	8,6061%	69,9963%
6	180	6,7969%	76,7931%
7	210	5,3034%	82,0965%
8	240	4,1084%	86,2049%
9	270	3,1694%	89,3744%
10	300	2,4395%	91,8139%
11	330	1,8758%	93,6896%
12	360	1,4420%	95,1316%
13	390	1,1089%	96,2405%
14	420	0,8533%	97,0938%
15	450	0,6572%	97,7510%
16	480	0,5067%	98,2577%
17	510	0,3911%	98,6489%
18	540	0,3022%	98,9511%
19	570	0,2338%	99,1849%
20	600	0,1811%	99,3660%

Tab. 1: Verlustverteilung bei einem homogenen Kreditportfolio⁵³

Nachfolgende Abbildungen veranschaulichen die Ergebnisse für die Dichte- und die Verteilungsfunktion aus obiger Tabelle graphisch. Der Graph der Dichtefunktion zeigt, dass Wahrscheinlichkeit für den Eintritt von Ausfallereignissen deutlich linksschief ist.

⁵³ Eigene Berechnungen

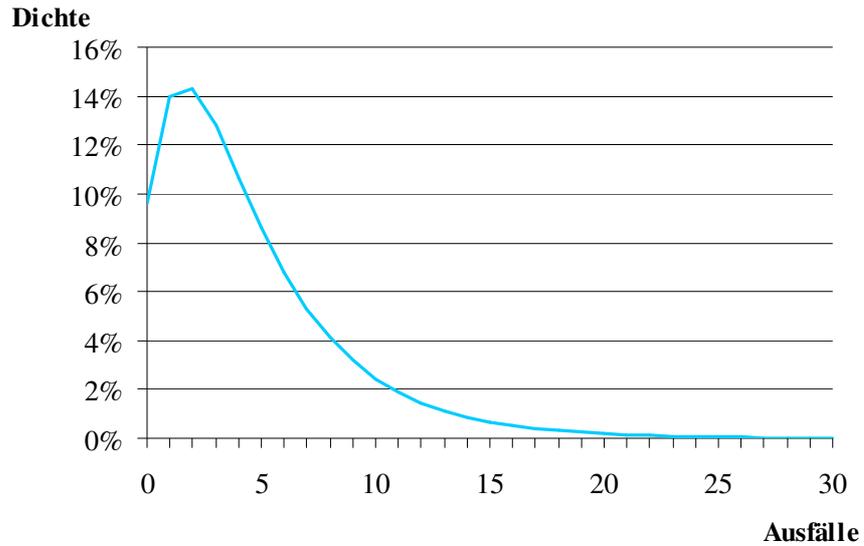


Abb. 5: Dichtefunktion bei einem homogenen Kreditportfolio

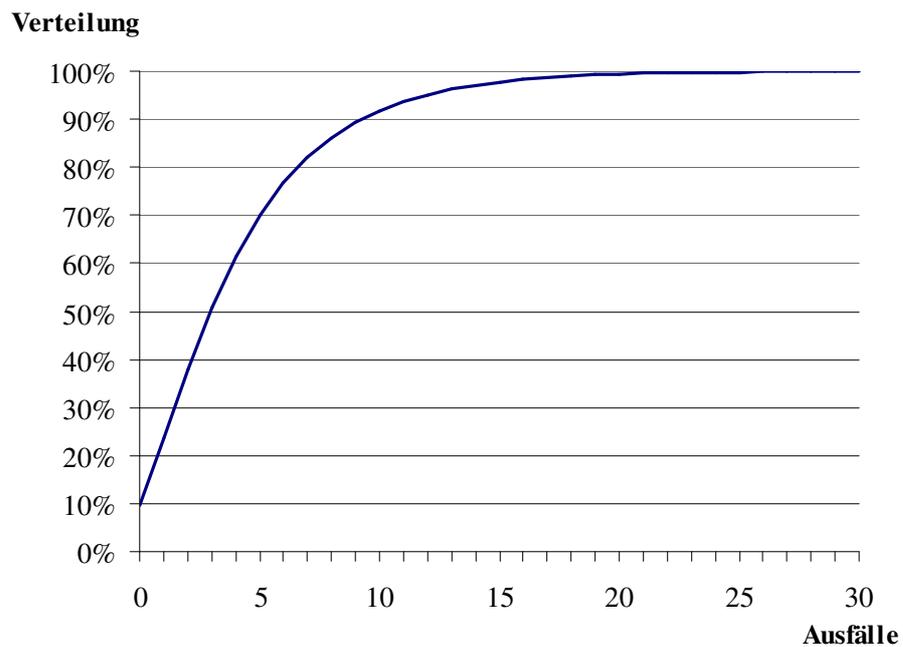


Abb. 6: Verteilungsfunktion bei einem homogenen Kreditportfolio

Über das Quantil des Konfidenzniveaus ergibt sich der Verlust bei gegebener Wahrscheinlichkeit. Der Credit-Value at Risk folgt dann aus dem potentiellen Verlust

abzüglich dem, in der Kreditkondition eingerechneten und somit vereinnahmten, erwarteten Verlust:

$$(28) \text{CVaR} = Q_\alpha - EL = 570 - 135 = 435 \text{ Geldeinheiten}$$

Dementsprechend liegt der Verlust aus dem Kreditportfolio der A-Bank innerhalb eines Jahres mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,00% nicht über 435 Geldeinheiten.

3.2.1.2 Modellierung des klassischen optionstheoretischen Ansatzes anhand eines Faktor-Modells bei heterogene Kreditportfolien

Nachdem das Ein-Faktor Modell für den klassischen optionstheoretischen Ansatz bei homogenen Kreditportfolien vorgestellt wurde, soll dieses Modell im Folgenden dazu verwendet werden, um denselben Ansatz bei heterogenen Kreditportfolien zu analysieren. Hierzu wird das lineare Ein-Faktor-Modell aus Formel (15) auf den heterogenen Fall ausgeweitet:

$$(29) W_1^i = \sqrt{\rho_i} \cdot X + \sqrt{1-\rho_i} \cdot Z_i, \text{ wobei } X \text{ normalverteilt mit Mittelwertvektor null und Kovarianzmatrix } \bar{\Sigma} = (\rho_{ij}) \text{ ist, wobei } \rho_{ij} = \text{Cov}(W_1^i, W_1^j) \text{ die Korrelation der Firmenwerte beschreibt, und } Z_i \text{ unabhängig und standardnormalverteilt ist.}$$

Da heterogene Kreditportfolien betrachtet werden, wird die Korrelationsmatrix bei steigender Anzahl von Kreditnehmern im Portfolio deutlich komplexer, d.h. konkret, dass $n \cdot (n-1)/2$ Korrelationen kalkuliert werden müssen. Betrachtet man beispielsweise den iTraxx-Index, welcher 125 Titel umfasst, müssten 7750 Korrelationen berechnet werden. Da dies nicht praktikabel ist, kann die Korrelationsmatrix signifikant verkleinert werden, indem einzelne Kreditnehmer zu Gruppen – beispielsweise nach regionalen oder branchenspezifischen Gesichtspunkten – zusammengefasst werden. Die Ausfallabhängigkeit kann dann durch die Korrelation der Entwicklung des Firmenwerts gegenüber einer gruppenspezifischen Komponente modelliert werden.⁵⁴

Für die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit gilt analog zu Formel (16):

$$(30) p_i(X) = P[W_1^i < B_i | X] = \Phi\left(\frac{B_i - \sqrt{\rho_i} \cdot X}{\sqrt{1-\rho_i}}\right) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho_i} \cdot X}{\sqrt{1-\rho_i}}\right)$$

Da Ausfälle bei bestimmter Höhe von X unabhängig voneinander sind und da aufgrund der Heterogenität des Portfolios die bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten $p_i(X)$ nicht für alle Kreditnehmer identisch sind, muss zur Kalkulation der gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeit das Produkt von $i = 1$ bis n gebildet werden:

⁵⁴ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 286

$$(31) \quad \begin{aligned} P[Y_1 = 1, \dots, Y_n = 1] &= E[P[Y_1 = 1, \dots, Y_n = 1 | X]] = E\left[\prod_{i=1}^n p_i(X)\right] \\ &= \int_{\mathfrak{R}^m} \prod_{i=1}^n \Phi\left(\frac{B_i - \sqrt{\rho_i} \cdot x}{\sqrt{1 - \rho_i}}\right) \Phi_m(\bar{\Sigma}; x) dx \end{aligned}$$

, wobei $\Phi_m(\bar{\Sigma}; \cdot)$ die m -

variate normalverteilte Dichtefunktion mit Kovarianzmatrix $\bar{\Sigma}$ darstellt.⁵⁵

Die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit stellt somit eine Mischung normalverteilter Wahrscheinlichkeiten dar, wobei die Verteilung des Makro-Faktors X die Mischverteilung darstellt.

Aufgrund der Bernoulli-Mischungsmodellen zugrunde liegenden (bedingten) Unabhängigkeitsannahme der Ausfallereignisse ergibt sich für die Verlustverteilung im heterogenen Portfolio in Anlehnung an Formel (19):⁵⁶

$$(32) \quad P[L_n \leq k] = \sum_{i=1}^k \int_{\mathfrak{R}^m} \prod_{i=1}^n (p(x))^{y_i} \cdot (1 - p(x))^{1 - y_i} \cdot \Phi_m(\bar{\Sigma}; x) dx$$

Die aufgeführten Formeln machen noch einmal die Grundidee des Bernoulli-Mischungsmodells deutlich: alle Ausfallwahrscheinlichkeiten werden von einem gemeinsamen systematischen Faktor, dem Makro-Faktor, bestimmt, aber der (bedingte) Eintritt eines individuellen Ausfallereignisses ist für jedes Unternehmen unabhängig von den anderen Unternehmen.⁵⁷

Beispiel

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt soll auch in diesem Beispiel ein Kreditportfolio analysiert werden. Dieses wird jedoch in diesem Fall als heterogen angenommen. Aus Vereinfachungsgründen wird ein Portfolio mit drei Kreditnehmern betrachtet sowie eine Verteilung anhand der Standardnormalverteilung unterstellt. Dieses kann auch als ein Portfolio mit drei in sich homogenen Gruppen von Kreditnehmern interpretiert werden. Gesucht wird die Dichte- sowie die Verteilungsfunktion und der Credit-Value-at-Risk des Portfolios bei einem 99,00%-igen Konfidenzniveau. Die nachfolgende Tabelle soll einen Überblick über die Spezifikationen der einzelnen Kreditnehmer geben:

⁵⁵ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 29

⁵⁶ Ebenda.

⁵⁷ Vgl. Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 124

Kredit-nehmer i	Ausfallwahrscheinlichkeit p_i	Korrelation zu dem Makro-Faktor ρ_i	Exposure at Default EAD_i	Recovery-Rate Rec_i
1	15% ⁵⁸	8%	50 GE	0,4
2	10%	5%	70 GE	0,5
3	25%	2%	30 GE	0,5

Tab. 2: Ausgangsdaten für die Modellierung eines heterogenen Beispielportfolios

Die Berechnung des jeweiligen Verlusts bei Eintritt eines Ausfallereignisses erfolgt anhand der Multiplikation des Exposures at Default mit eins minus der Recovery-Rate. Für die Kredite ergibt sich daraus: $L_1 = 30$ GE, $L_2 = 35$ GE und $L_3 = 15$ GE. Der Expected Loss des Portfolios, welcher zu Berechnung des Credit-Value-at-Risk nötig ist, wird durch die Summe der, mit der jeweiligen Ausfallwahrscheinlichkeit gewichteten, Verluste bestimmt, d.h.:

$$(33) \quad EL = E(L) = \sum_{i=1}^I EAD_i \cdot (1 - Rec) \cdot p_i = 11,75 \text{ GE}$$

Unter Anwendung von Formel (32) ergibt sich für die Verlustverteilung:

Verlust L_k	Dichte $f(k)$	Vert.funktion $F(k)$
0	58,0424%	58,0424%
15	18,7728%	76,8152%
30	9,6709%	86,4861%
35	6,0513%	92,5375%
45	3,5335%	96,0709%
50	2,1664%	98,2373%
65	1,2578%	99,4952%
80	0,5049%	100,0000%

Tab. 3: Verlustverteilung bei einem heterogenen Kreditportfolio⁵⁹

Anhand obiger Verlustverteilung sowie dem bereits berechneten Expected Loss ergibt sich ein Credit-Value-at-Risk in Höhe von 53,25 Geldeinheiten. Bereits auf den ersten Blick wird deutlich, dass der Credit-Value-at-Risk im Verhältnis zum gesamten Nominal des jeweiligen

⁵⁸ Die Wahl der individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten erfolgte aus Darstellungsgründen in der aufgeführten, unrealistischen Größenordnung.

⁵⁹ Eigene Berechnungen

Portfolios deutlich höher liegt als im vorangegangenen Beispiel.⁶⁰ Die Ursache für diese Differenz ist insbesondere in der deutlich höheren Ausfallwahrscheinlichkeit der einzelnen Kreditnehmer beim heterogenen Beispielportfolio zu sehen. Auch die Korrelation der Kreditnehmer zum Makro-Faktor beeinflusst die Verlustverteilung und somit indirekt den Credit-Value-at-Risk. Da die gegebene Korrelation im heterogenen Fall jedoch niedriger ist als im homogenen Portfolio trägt diese lediglich dazu bei, dass die Wahrscheinlichkeit von vielen Verlusten sinkt und somit der Credit-Value-at-Risk ebenfalls geringer sein müsste. Der Effekt aus einer Erhöhung der Ausfallwahrscheinlichkeit steht also dem Effekt aus einer Verringerung der Korrelation zum Makro-Faktor gegenüber, wobei jedoch der erstgenannte Effekt hier deutlich überwiegt und somit den Credit-Value-at-Risk deutlich ansteigen lässt.

Nachfolgende Abbildungen sollen den Verlauf der Dichte- und der Verteilungsfunktion graphisch verdeutlichen:

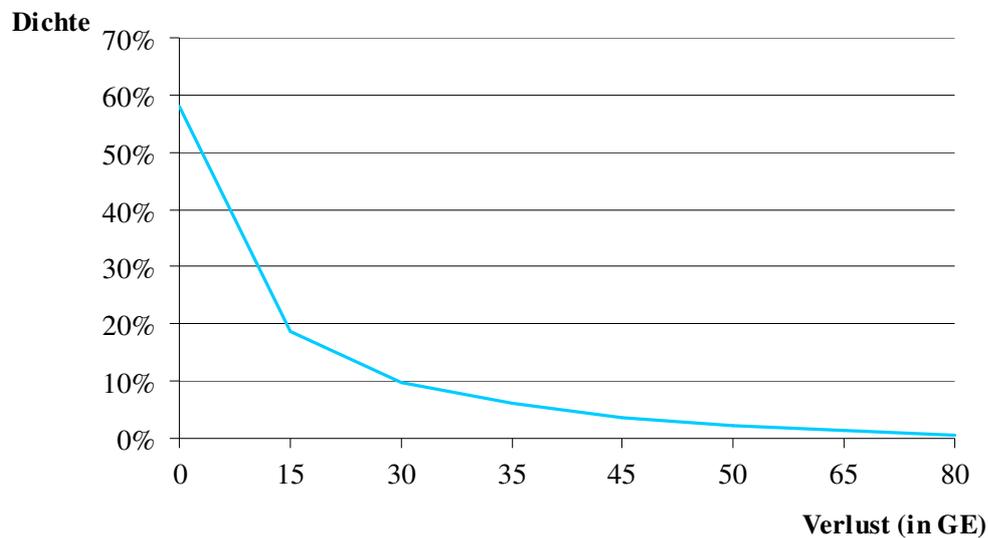


Abb. 7: Dichtefunktion des heterogenen Beispiel-Portfolios

⁶⁰ Beim Beispiel eines homogenen Portfolios betrug der CVAR 5,8% des gesamten Nominals des Portfolios während bei dem Beispiel des heterogenen Portfolios der CVAR 35,5% des gesamten Nominals des Portfolios ausmacht.

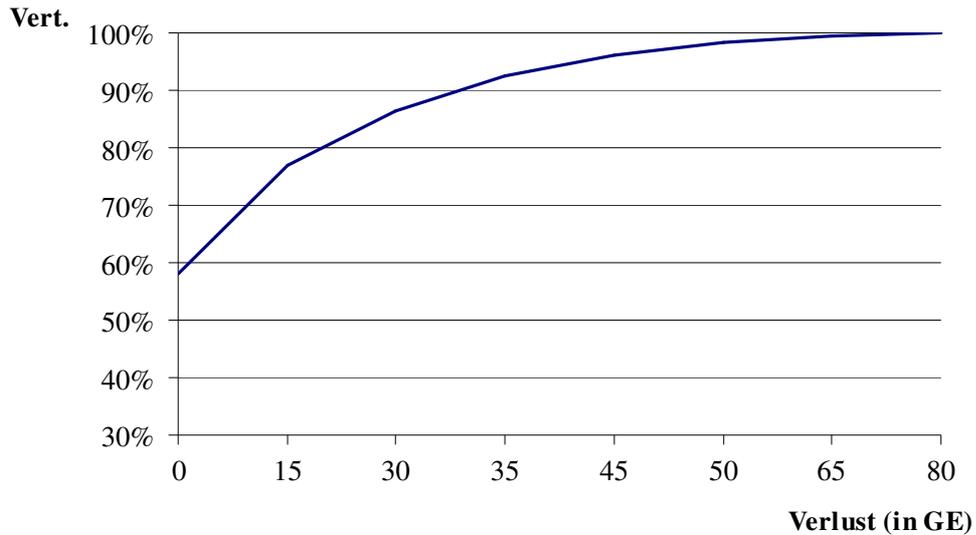


Abb. 8: Verteilungsfunktion des heterogenen Beispiel-Portfolios

Der Verlauf der Dichtefunktion (und somit auch der Verteilungsfunktion) ist sowohl beim heterogenen als auch beim homogenen Kreditportfolio von drei Einflussfaktoren abhängig: der Ausfallwahrscheinlichkeit, der Korrelation zum Makro-Faktor und der Anzahl der Kreditnehmer innerhalb des Portfolios. Grundsätzlich lässt sich folgern, dass je kleiner die Ausfallwahrscheinlichkeit, je höher die Korrelation und je kleiner die Anzahl der Kreditnehmer ist, desto stärker verschiebt sich die Verlustverteilung nach links. Bei kleinen Ausfallwahrscheinlichkeiten sowie einer geringen Anzahl der Kreditnehmer entspricht dies einer Konzentration der Verlustwahrscheinlichkeit am linken Rand der Verteilung, was tendenziell zu eher geringeren Credit-Value-at-Risks führt. Da eine steigende Korrelation jedoch nicht nur zu einer Verschiebung der Verlustverteilung nach links, sondern auch zu einem Abflachen der Verteilungsfunktion führt, entfällt gleichzeitig eine höhere Wahrscheinlichkeitsmasse auf hohe Verluste. Somit führt eine steigende Korrelation sowohl zu einer höheren Wahrscheinlichkeitsmasse bei geringen als auch bei hohen Verlusten, was inhaltlich bedeutet, dass extreme Ereignisse wahrscheinlicher werden.⁶¹

3.2.1.3 Erweiterung der Faktor-Modelle

Multi-Faktor-Modell. Für eine spezifischere Modellierung des Einflusses von dem Makro-Faktor auf die Firmenwertentwicklung soll im Folgenden das lineare Ein-Faktor-Modell aus Formel (15) in ein lineares Multi-Faktor-Modell ausgeweitet werden:⁶²

⁶¹ Vgl. Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 135

⁶² Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 28f.

(34) $W_1^i = \bar{a}_i X + b_i Z_i$, wobei X normalverteilt mit Mittelwertvektor „null“ und Kovarianzmatrix $\bar{\Sigma} = (\rho_{ij})$ ist, wobei $\rho_{ij} = \text{Cov}(W_1^i, W_1^j)$ die Korrelation der Firmenwerte beschreibt, und Z_i unabhängig und standardnormalverteilt ist. Der Vektor $\bar{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$ beschreibt die konstanten Faktorgewichte des Makro-Faktors X . Der Parameter b_i stellt ebenfalls eine Konstante dar.

Für die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit gilt dann analog zu Formel (30):⁶³

$$(35) \quad p_i(X) = \mathbb{P}[W_1^i < B_i | X] = \Phi\left(\frac{B_i - \bar{a}_i X}{b_i}\right)$$

Ebenso ergibt sich analog zu Gleichung (31) für die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit:

$$(36) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}[Y_1 = 1, \dots, Y_n = 1] &= E[\mathbb{P}[Y_1 = 1, \dots, Y_n = 1 | X]] = E\left[\prod_{i=1}^n p_i(X)\right] \\ &= \int_{\mathfrak{R}^m} \prod_{i=1}^n \Phi\left(\frac{B_i - \bar{a}_i x}{b_i}\right) \Phi_m(\bar{\Sigma}; x) dx \end{aligned}$$

Allgemeine Erweiterung der Faktor-Modelle. Durch Ausweitung der Faktor-Modelle aus Gleichung (15) bzw. (34) wird es möglich weitere, realistischere Verteilungen zu verwenden. Eine Möglichkeit hierzu ergibt sich über die Einführung einer unabhängigen Zufallsvariable U sowie der Variablen $c_i \in \mathfrak{R}$ und $d \in \mathfrak{R}_0^+$:⁶⁴

$$(37) \quad W_1^i = c_i(U) + d(U) \cdot (\bar{a}_i X + b_i Z_i)$$

Entsprechend ist die Verteilung des Vektors (W^1, \dots, W^n) abhängig von der Höhe von c_i , d und der Verteilung von U . In Abhängigkeit von der jeweiligen Höhe von X und U ist die Zufallsvariable $W^i \sim \Phi(c_i(U) + d(U) \cdot \bar{a}_i X, (d(U) \cdot b_i)^2)$ normalverteilt. Daraus folgt für die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit analog zu Formel (35):

$$(38) \quad \mathbb{P}[W_1^i < B_i | X, U] = \Phi\left(\frac{B_i - c_i(U) - d(U) \cdot \bar{a}_i X}{d(U) \cdot b_i}\right)$$

Ebenso gilt für die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit mit der Dichtefunktion f_U der Verteilung U analog zu Gleichung (36):

$$(39) \quad \mathbb{P}[Y_1 = 1, \dots, Y_n = 1] = \int_{\mathfrak{R}^{m+1}} \prod_{i=1}^n \Phi\left(\frac{B_i - c_i(u) - d(u) \bar{a}_i x}{d(u) b_i}\right) \Phi_m(\bar{\Sigma}; x) f_U(u) dx du$$

⁶³ Formel (30) ist repräsentativ für in der Praxis verwendete Kreditportfoliomodelle, wie Moody's KMV und RiskMetrics; vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 28f.

⁶⁴ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 29

Je nach der Wahl von c_i , d und der Verteilung U können unterschiedliche Faktor-Modelle gebildet werden. Werden beispielsweise für alle Werte u der Verteilung U $c_i(u) = 0$ und $d(u) = 1$ gesetzt, so ist Formel (37) mit Formel (34) identisch. Entsprechend ist der Faktorvektor (W^1, \dots, W^n) multivariat normalverteilt mit Mittelwertvektor null und Kovarianzmatrix $\bar{\Sigma}$. Die Abhängigkeitsstruktur der Unternehmenswerte wird in diesem Fall durch die Normal- oder Gauß-Copula ausgedrückt.

Eine Änderung des zugrundeliegenden Modells für die Firmenwertentwicklung bedingt, dass gegebenenfalls auch die zugrundeliegende Copula angepasst werden muss. Werden in dem Modell beispielsweise $c_i(u) = 0$ und $d(u) = \sqrt{w/u}$ für $w > 0$ und chi-quadrat-verteilt U ($U \sim \chi^2(w)$) zugrunde gelegt, so ist der Faktorvektor (W^1, \dots, W^n) mit Mittelwertvektor null, Kovarianzmatrix $\frac{w}{w-2} \Sigma$ multivariat t-verteilt mit $w > 2$ Freiheitsgraden. Die Abhängigkeitsstruktur wird dann durch die t-Copula beschrieben.⁶⁵

Durch nachfolgende Verallgemeinerung von Formel (14) erhält man:

$$(40) Y_i(T) = 1 \Leftrightarrow W_T^i < B_i$$

Daraus folgt, dass die gemeinsame Wahrscheinlichkeit nachfolgende Bedingung erfüllt:⁶⁶

$$(41) p(T_1, \dots, T_n) = C(p_1(T_1), \dots, p_n(T_n)) = C_{T_1, \dots, T_n}^W(p_1(T_1), \dots, p_n(T_n))$$

Wie bereits bei den beiden aufgeführten Beispielen deutlich wird, entspricht die Copula C_{T_1, \dots, T_n}^W des Faktorvektors $(W_{T_1}^1, \dots, W_{T_n}^n)$ der Copula C der Ausfallzeitpunkte, was formal verdeutlicht, dass der Eintritt von Ausfallereignissen bei Unternehmenswertmodellen immer von der Entwicklung der Firmenwerte abhängig ist. Vergleicht man die beiden exemplarisch genannten Copulae – die Gauß- und die t-Copula – so wird deutlich, dass bei einer gegebenen Kovarianzmatrix die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit und somit der erwartete Verlust von der gewählten Copula abhängig ist. Einerseits gehören beide Copulae aufgrund ihrer Symmetrie zwar zur Gruppe der sog. elliptischen Copulae an, andererseits ist offensichtlich, dass die t-Copula aufgrund der zugrunde liegenden t-Verteilung je nach Anzahl der Freiheitsgrade eine mehr oder weniger deutlich ausgeprägte Abhängigkeit in den Rändern der Verteilung aufweist.⁶⁷ Bei wenigen Freiheitsgraden ist die Abhängigkeit in den Rändern der t-Verteilung deutlich stärker ausgeprägt als bei der Gauß-Copula. Da die Grenzausfallwahrscheinlichkeiten p_i normalerweise sehr klein sind, führt dies dazu, dass das Modell mit der t-Copula dazu neigt im Verhältnis zur Gauß-Copula relativ niedrigere Firmenwertentwicklungen für sämtliche Unternehmen gleichzeitig zu simulieren und somit gemeinsame Ausfälle wahrscheinlicher macht als das Modell mit der Gauß-Copula. Bei einer gegebenen Kovarianzmatrix und wenigen Freiheitsgraden, ist das Modell mit der t-Copula

⁶⁵ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 30f.

⁶⁶ Ebenda

⁶⁷ Je weniger Freiheitsgrade der t-Verteilung zugrunde liegen, desto stärker ist die Abhängigkeit in den Rändern der Verteilung ausgeprägt.

gegenüber dem Modell mit der Gauß-Copula konservativer, da es zu höheren gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeiten führt.⁶⁸ Obwohl mit der t-Copula extreme Ereignisse oftmals besser berücksichtigt werden können, ist die Verwendung der Gauß-Copula aufgrund deren leichteren Implementier- und Kalibrierbarkeit in der Praxis weiter verbreitet.⁶⁹

3.2.2 Einführung der mikroökonomischen Abhängigkeit

Wie bereits erläutert, beschreibt die mikroökonomische Abhängigkeit die Abhängigkeit, welche zwischen verschiedenen Unternehmen – aufgrund eines besonderen Verhältnisses zueinander – bestehen kann. Beispielsweise hat eine Verschlechterung der Bonität einer Muttergesellschaft meist einen negativen Einfluss auf die Bonität der Tochtergesellschaft. Ebenso können viele Ausfälle von Kreditnehmern eines Kreditinstituts bei diesem Liquiditätsprobleme hervorrufen. Es ist offensichtlich, dass derartige Ereignisse bei einem oder mehreren Unternehmen das Ausfallrisiko eines oder mehrerer anderer Unternehmen beeinflussen können. Die Berücksichtigung dieser Abhängigkeiten ist jedoch sehr komplex und wurde hinsichtlich der Modellierung in Theorie und Praxis bislang relativ selten analysiert. Ein Ansatz ist es derartige Abhängigkeiten in einem Unternehmenswertmodell zu berücksichtigen, indem „jumps“ bei der Modellierung der Firmenwertentwicklung eingebaut werden. Konkret bedeutet dies, dass ein Sprung nach unten in der Firmenwertentwicklung eines Unternehmens mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit als Auslöser für weitere Sprünge nach unten in der Firmenwertentwicklung anderer Unternehmen fungiert. Zwar bietet dieser Ansatz eine gute Möglichkeit die Verbreitung von ökonomischen Notsituationen zu modellieren, jedoch ist es über diesen Ansatz nicht möglich ein Ergebnis für die gemeinsame Verteilung der historischen Tiefs der Firmenwerte in höheren Dimensionen zu bestimmen. Daher kann auch keine gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit berechnet werden.⁷⁰

Ein alternativer Ansatz ist es die Interaktionsbeziehungen über die standardisierte Ausfallschranke B_i beim Bernoulli-Mischungsmodell nach Formel (30) einzubauen. Dies kann geschehen, indem die Ausfallschranke als zufällig und von der Liquidität eines Unternehmens i abhängig modelliert wird. Die Liquidität des Unternehmens i ist wiederum abhängig von der Bonität der Geschäftspartner des Unternehmens. Sind die Liquiditätsreserven durch den Zahlungsausfall eines Geschäftspartners angespannt, werden die Verluste in gleicher Höhe durch die Emission von weiterem Fremdkapital kompensiert. Dies führt zu einer Erhöhung der Ausfallschranke, was zum Ausdruck bringt, dass die

⁶⁸ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 30f.

⁶⁹ Vgl. Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 210f.

⁷⁰ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 32

Ausfallwahrscheinlichkeit der Firma angestiegen ist. Fällt keiner der Geschäftspartner aus, verbleibt auch die Ausfallschranke unverändert.^{71,72}

3.3 Intensitätsmodelle

3.3.1 Einführung der makroökonomischen Abhängigkeit

Die makroökonomische Abhängigkeit kann bei Intensitätsmodellen eingeführt werden, indem davon ausgegangen wird, dass die Ausfallintensitäten der einzelnen Firmen mit dem makroökonomischen Umfeld korrelieren. Die Grundlage dessen bietet im Folgenden ein Intensitätsmodell mit stochastischer Intensität – also ein Cox-Prozess. Aufgrund der Portfoliobetrachtung wird der Cox-Prozess hier im multivariaten Fall betrachtet. Ein multivariater Cox-Prozess ist dann gegeben, wenn die individuellen inhomogenen Poisson-Prozesse N_1, \dots, N_n der Ausfallzeiten τ_1, \dots, τ_n mit den entsprechenden Intensitäten $\tilde{\lambda}^1, \dots, \tilde{\lambda}^n$ einem unabhängigen Cox-Prozess folgen.⁷³ Ein derartiger Cox-Prozess kann gebildet werden, indem stochastische Risikofaktoren eingeführt werden, welche die Intensität beeinflussen. Konkret bedeutet dies, dass für jedes Unternehmen i eine stochastische Variable X_i , welche das idiosynkratische Risiko eines individuellen Unternehmens modelliert, sowie eine weitere stochastische Variable X_{sys} , welche zur Modellierung des systematischen Risikos aller Unternehmen dient, eingeführt werden. Kommt es also zu einem systematischen Schock, so sind davon alle Unternehmen über X_{sys} gleichermaßen betroffen – lediglich der idiosynkratische Risikofaktor X_i sorgt dafür, dass das kumulierte Risiko aus beiden Faktoren unternehmensspezifisch höher oder geringer ausfällt.⁷⁴ Mit dieser Aussage wird gleichzeitig impliziert, dass die beiden Risikofaktoren durch Addition miteinander verknüpft sind. Entsprechend gilt:

$$(42) \quad \tilde{\lambda}_i = \tilde{\Lambda}_i(X_t) = X_{\text{sys}} + X_i$$

Auch, wenn dies ein häufig getroffene und intuitiv nachvollziehbare Annahme ist, so ist die Verknüpfung beider Komponenten auch über andere nicht-negative stochastischen Funktionen $\tilde{\Lambda}_i(X)$ denkbar.

Für die bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit S gilt:⁷⁵

⁷¹ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 32

⁷² Für eine ausführliche Diskussion dieses Ansatzes s. Giesecke, Kay et al.: Cyclical Correlations, Credit Contagion, and Portfolio Losses. Ithaca, USA: Cornell University sowie Berlin: Technische Universität Berlin, 2003.

⁷³ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 51

⁷⁴ Vgl. Giesecke, Kay: A Simple Exponential Model for Dependent Defaults, in: Journal of Fixed Income Vol. 13, 2003. S. 4

⁷⁵ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 51f.

$$(43) S[\tau_i > T | (X_t)_{t \leq T}] = E^Q \left[e^{-\int_0^T \tilde{\lambda}_i(t) dt} \right]$$

Durch Einsetzen von Formel (42) in Gleichung (43) ergibt sich aufgrund der Unabhängigkeit von X_{sys} und X_i für die individuelle Überlebenswahrscheinlichkeit:⁷⁶

$$(44) S[\tau_i > T] = E^Q \left[e^{-\int_0^T X_{sys}(t) dt} \right] \cdot E^Q \left[e^{-\int_0^T X_i(t) dt} \right]$$

Die Realisationen der Risikofaktoren X_{sys} und X_i bestimmen dementsprechend die Höhe der Intensität von jedem individuellen Unternehmen. Nichtsdestotrotz muss beachtet werden, dass der Eintritt von Ausfallereignissen – bei gegebenen Realisationen der Risikofaktoren – voneinander unabhängig erfolgt. Der Prozess N_i ist daher (in Abhängigkeit von der Höhe der Realisationen von X_{sys} und X_i) bedingt unabhängig.

Für die gemeinsame bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit gilt entsprechend:⁷⁷

$$(45) S[\tau_1 > T_1, \dots, \tau_n > T_n | (X(t))_{t \leq T}] = \prod_{i=1}^n S[\tau_i > T_i | (X(t))_{t \leq T}] = e^{-\sum_{i=1}^n \int_0^{T_i} \tilde{\lambda}_i(t) dt}$$

bzw. für die gemeinsame (unbedingte) Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$(46) s(T_1, \dots, T_n) = S[\tau_1 > T_1, \dots, \tau_n > T_n] = E^Q \left[e^{-\sum_{i=1}^n \int_0^{T_i} \tilde{\lambda}_i(t) dt} \right]$$

Die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit entspricht somit:

$$(47) p(T_1, \dots, T_n) = P[\tau_1 \leq T_1, \dots, \tau_n \leq T_n] = 1 - E^Q \left[e^{-\sum_{i=1}^n \int_0^{T_i} \tilde{\lambda}_i(t) dt} \right]$$

Einführung von Copulae zur Modellierung der gemeinsamen Überlebens-/Ausfallabhängigkeiten. Zu jeder Überlebenswahrscheinlichkeit s existiert eine dazugehörige Copula C analog zu Gleichung (2):⁷⁸

⁷⁶ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 51f.

⁷⁷ Ebenda.

⁷⁸ Vgl. ebd., S. 53

$$(48) C(u_1, \dots, u_n) = s(s_1^{-1}(u_1), \dots, s_n^{-1}(u_n)) \text{ mit der Grenzüberlebenswahrscheinlichkeit}$$

$$s_i(T) = S[\tau_i > T] = 1 - p_i(T)$$

Für die Grenzüberlebenswahrscheinlichkeit wird in der Regel:

$$(49) s_i(T) = e^{-\int_0^T \tilde{\lambda}^i(t) dt}$$

angenommen.

Für die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit gilt entsprechend:⁷⁹

$$(50) s(T_1, \dots, T_n) = C(s_1(T_1), \dots, s_n(T_n))$$

Die sich aus (48) bzw. (50) ergebende Copula ist offensichtlich abhängig von der Wahl der Funktionen $\tilde{\Lambda}_i$ sowie der Verteilung von X_i bzw. X_{sys} . Grundsätzlich kann jede Copula dazu verwendet werden, die entsprechenden Abhängigkeiten zu modellieren. Wie bereits beschrieben, wird in der Praxis häufig die Gauß-Copula als Abhängigkeitsmaß unterstellt, wobei diverse Arbeiten für die Verwendung der t-Copula anstelle der Gauß-Copula plädieren, da damit extreme Ereignisse besser beschrieben werden können.⁸⁰

Kalibrierung. Zur Kalibrierung werden die Intensitäten $\tilde{\lambda}_i$ von den Marktdaten abgeleitet und eine Copula geschätzt, welche ungefähr die Korrelation am Markt beobachtbarer Daten, wie der Firmenwertentwicklung oder der Entwicklung von Aktien, der jeweiligen abhängigen Firmen wiedergibt. Letztlich ist die Wahl der Copula jedoch willkürlich, da die empirische Datenbasis nicht ausreichend ist, um die Abhängigkeitsstruktur abschließend einschätzen zu können. Da jedoch unterschiedliche Copulae zu teilweise deutlich voneinander abweichenden Ergebnissen führen können, besteht immer ein inhärentes Modellrisiko.⁸¹

Beispiel

Nachdem die A-Bank anhand von Portfoliomodellen sowohl homogene als auch heterogene Kreditportfolien analysiert hat, interessiert sie sich nun dafür derartige Portfoliomodelle zur Bewertung von Finanztiteln einzusetzen. Insbesondere möchte sie die Intensitätsmodelle dazu nutzen, um einen Basket Credit Default Swap (Basket CDS) zu bewerten. Bei Basket CDS handelt es sich um eine Ausprägung von Credit Default Swaps, bei welchen – im Gegensatz zum CDS-Kontrakt – mehr als ein Referenztitel zugrunde gelegt wird. Damit entspricht der Basket CDS n-Abschlüssen von einzelnen, auf die entsprechenden Risikoaktiva bezogenen,

⁷⁹ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 53

⁸⁰ Vgl. Martin, Marcus R.W. und Reitz, Stefan und Wehn, Carsten S.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 210

⁸¹ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 53

CDS-Kontrakten, wobei „n“ für die Anzahl der einzelnen abzusichernden Kredite steht.⁸² Um eine differenziertere Risikoabsicherung sowie eine günstigere Prämie zu erzielen, wird in der Praxis oft eine weitergehende Spezifizierung des Credit Events vorgenommen. Häufige Varianten sind nth-to-default-Strukturen, bei welchen der Sicherungsnehmer sich nur gegen den „n“-ten im Portfolio eintretenden Credit Event absichert.⁸³

Die A-Bank möchte das beschriebene Intensitätsmodell nutzen, um einen fünfjährigen nth-to-default-Swap bestehend aus drei Referenztiteln mit konstanten fairen CDS-Spreads von $s_1 = 40$ bps, $s_2 = 50$ bps und $s_3 = 30$ bps zu bewerten. Darüber hinaus wird weiterhin eine konstante Zinsstruktur von $r = 5\%$ sowie eine Recovery-Rate von 40% unterstellt. Aus Vereinfachungsgründen wird daneben von einer konstanten Asset-Korrelation zwischen den Referenztiteln von $\rho = 0,3$ und diskreten Prämienzahlungen ausgegangen. Der faire Spread eines derartigen Basket CDS bestimmt sich anhand von:⁸⁴

$$(51) \quad s_0^{n:m} \approx \frac{E^Q \left(\sum_{i=1}^m (1 - Rec_i) \cdot DF(0, \tau_{n:m}) \cdot 1_{\{\tau_i = \tau_{n:m}, \tau_{n:m} \leq T\}} \right)}{E^Q \left(\sum_{k=1}^v \Delta k \cdot DF_k \cdot 1_{\{k < \tau_{n:m}, \tau_{n:m} \leq T\}} + \sum_{k=1}^v \Delta k \cdot (\tau_{n:m} - k) \cdot DF(0, \tau_{n:m}) \cdot 1_{\{\tau_i = \tau_{n:m}, \tau_{n:m} \leq T\}} \right)},$$

wobei $n:m$ den „n“-ten Ausfall bei m Referenztiteln und Δk die Periodenlänge zwischen den Zeitpunkten der Prämienzahlungen t_k bezeichnet. Hierbei ist zu beachten, dass sich die Summe der Diskontfaktoren für die Zeit bis zur letzten (vollen) Prämienzahlung vor Eintritt des Ausfallereignisses anhand von nachfolgender Gleichung ergibt:⁸⁵

$$(52) \quad \sum_{i=1}^v \Delta i \cdot DF_i = \sum_{i=1}^{\min(\tau_{n:m}, T)} 1 \cdot e^{-r \cdot i} = \frac{1 - e^{-r \cdot (\min(\tau_{n:m}, T) + 1)}}{1 - e^{-r}} - 1$$

Andererseits ist anzumerken, dass Formel (51) die Annahme zugrunde liegt, dass zu jedem Ausfallzeitpunkt, welcher zwischen den Prämienzahlungsterminen liegt, exakt der Anteil der Prämie für die anteilige Periode gezahlt wird.

⁸² Vgl. Arvantis, Angelo et al.: Credit: The complete guide to pricing, hedging and risk management. London: Risk Waters Group Ltd., 2001. S. 125

⁸³ Vgl. Posthaus, Achim: Exotische Kreditderivate, in: Burghof, Hans-Peter et al.: Kreditderivate – Handbuch für die Bank und Anlagepraxis. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2005. S. 74ff. sowie Horat, Robert: Kreditderivate – Variantenreiche Finanzinstrumente mit Potential für die Praxis, in: Der Schweizer Treuhänder, November 2003. S. 970

⁸⁴ Vgl. Martin, Marcus R.W. und Reitz, Stefan und Wehn, Carsten S.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S.206

⁸⁵ Ebenda.

Für die Bewertung von Finanztiteln mit einer n^{th} -to-default-Struktur ist es von zentraler Bedeutung den Ausfallzeitpunkt zu modellieren. Hierzu soll im Folgenden die Möglichkeit einer Bewertung anhand der Verwendung von Copulae nach Li aufgezeigt werden:⁸⁶

Die Modellierung der Ausfallzeit eines Referenztitels kann anhand der Verteilungsfunktion $F_i(t)$ der Ausfallzeit geschehen:

$$(53) F_i(t) = E^Q(\tau_i < t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda_i(u) du}$$

Da in diesem Fall gilt, dass $F_i(\tau_i)$ auf $[0,1]$ gleichverteilt ist, entspricht im Umkehrschluss:

$$(54) \tau_i = F_i^{-1}(U_i), \text{ wobei } U_i \text{ eine auf } [0,1] \text{ gleichverteilte Zufallsvariable ist.}$$

Bei der Betrachtung eines einzelnen Titels ergibt sich entsprechend:

$$(55) F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t} = u \text{ mit } u = \text{Realisation der Zufallsvariable } U_i$$

Durch Umformung erhält man:

$$(56) t = -\frac{\ln(1-u)}{\lambda_i}$$

Zur Bewertung von Basket-Kreditderivaten wird jedoch die risikoneutrale gemeinsame Verteilung der Ausfallzeiten – also die multivariate Verteilungsfunktion F aller Ausfallzeiten $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ – benötigt. Diese ergibt sich grundsätzlich anhand von:

$$(57) F(t_1, \dots, t_n) = E^Q(\tau_1 < t_1, \dots, \tau_n < t_n)$$

Da die Randverteilungen dabei zwangsläufig gemäß Formel (53) bzw. (54) definiert sind, kann die Abhängigkeitsstruktur über Copulae bestimmt werden. Verwendet man die Gauß'sche Copula, so gilt:

$$(58) F(t_1, \dots, t_n) = C(F_1(t_1), \dots, F_n(t_n)) = \Phi_n(\Phi^{-1}(F_1(t_1)), \dots, \Phi^{-1}(F_n(t_n)); \Sigma)$$

Daraus folgt, dass ausgehend von:

$$(59) F_i(\Phi(x_i)) < t_i \Leftrightarrow x_i < \Phi^{-1}(F_i(t_i))$$

über eine Realisation (x_1, \dots, x_n) eines standardnormalverteilten Zufallsvektors $X \sim N_n(0, \Sigma)$ die abhängigen Ausfallzeiten der einzelnen Referenztitel anhand nachfolgender Vorgehensweise simuliert werden können:⁸⁷

⁸⁶ Vgl. Li, David X.: On Default Correlation: A Copula Funktion Approach, in: Riskmetrics: Working Paper Number 99-07, 2000. sowie Martin, Marcus R.W. und Reitz, Stefan und Wehn, Carsten S.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 201ff.

1. Bootstrapping der Ausfallintensitäten der Randverteilungen F_i aller Referenztitel aus den Marktquotierungen der CDS-Spreads
2. Generierung abhängiger normalverteilter Zufallsgrößen zu einer gegebene Korrelationsmatrix anhand von:
 - a. Erzeugung von n unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen r_i , was zu einem Vektor r der Zufallsvariablen führt.
 - b. Multiplizierung des Vektors mit der mittels Cholesky-Zerlegung der Korrelationsmatrix gewonnenen unteren Dreiecksmatrix Γ . Dadurch wird ein Vektor $(x_1, \dots, x_n) = \Gamma \cdot r$ bestehend aus standardnormalverteilten abhängigen Zufallszahlen x_i , welche über die Korrelationsmatrix miteinander korrelieren, gebildet.
3. Aus dieser Realisation (x_1, \dots, x_n) lassen sich anhand von (59) die Ausfallzeiten errechnen

Anschließend kann anhand der beschriebenen Vorgehensweise eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt werden.

Für die Bewertung des n^{th} -to-default-Swaps der A-Bank bedeutet dies, dass zuerst aus den gegebenen Marktdaten die entsprechenden Ausfallintensitäten bestimmt werden müssen. Die Umrechnung kann dabei beispielsweise approximativ über das sog. „Credit Triangle“ erfolgen. Das Credit Triangle stellt einen approximativen Zusammenhang zwischen dem fairen CDS-Spread und der Ausfallintensität her. Anhand des Credit Triangles ergibt sich die Ausfallintensität anhand von:⁸⁸

$$(60) \lambda_i \approx \frac{s_0^{CDS}}{1 - Rec}$$

Für die jeweiligen Unternehmen ergeben sich danach Ausfallintensitäten von $\lambda_1 = 0,6667\%$, $\lambda_2 = 0,8333\%$ und $\lambda_3 = 0,5000\%$. Aufgrund der Annahme konstanter CDS-Spreads und somit konstanter Ausfallintensitäten lassen sich die entsprechenden Randverteilungen in Abhängigkeit von der Zeit über Formel (55) bestimmen. Nachfolgende Tabelle gibt – anhand eines Szenarios der Monte-Carlo-Simulation – einen Überblick über die einzelnen oben beschriebenen Berechnungsschritte, wobei aufgrund der Asset-Korrelation von 0,3 bei Drei-Wertpapier-Fall die folgende Cholesky-Matrix zum Einsatz kommt:⁸⁹

⁸⁷ Vgl. Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 200ff.

⁸⁸ Vgl. ebd., S. 178f.

⁸⁹ Vgl. ebd., S. 202f.

$$(61) \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} & 0 \\ \rho & \rho \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} & \sqrt{1-\rho^2} \left(1 + \frac{1-\rho}{1+\rho}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,9539 & 0 \\ 0,3 & 0,2201 & 0,9282 \end{pmatrix}$$

i	s_i (in bps)	λ_i (in %)	u_i	$r_i = \Phi^{-1}(u_i)$	$x_i = (\Gamma \cdot r)_i$	$y_i = \Phi(x_i)$	$\tau_i = -\frac{\ln(1-y_i)}{\lambda_i}$
1	40	0,6667	0,0278	-1,9142	-1,9142	0,0278	4,2288 Jahre
2	50	0,8333	0,0337	-1,8290	-2,3190	0,0102	1,2300 Jahre
3	30	0,5000	0,3578	-0,3643	-1,3151	0,0942	19,7971 Jahre

Tab. 4: Ein Szenario der Monte-Carlo-Simulation zur Ermittlung des n^{th} -to-default-Spreads⁹⁰

Das in obiger Tabelle aufgeführte Szenario der Monte-Carlo-Simulation führt zu zwei Ausfällen während der fünfjährigen Laufzeit des n^{th} -to-default-Swaps. So fällt zuerst der zweite Referenztitel nach 1,23 Jahren und anschließend der erste Referenztitel nach 4,2288 Jahren aus. Der dritte Referenztitel würde erst nach 19,7971 Jahren ausfallen, so dass dessen Ausfall für den fünfjährigen Swap unberücksichtigt bleibt. Zur Bewertung des n^{th} -to-default-Swaps muss nun für jedes Szenario der Monte-Carlo-Simulation anhand von Formel (51) sowohl der Barwert des Contingent Legs (Zähler) als auch der Barwert des Premium Legs (Nenner) für den ersten, den zweiten und den dritten Ausfall berechnet werden. Für das oben beschriebene Szenario der Monte-Carlo-Simulation ergibt sich:

	First-to-Default	Second-to-Default	Third-to-Default
Contingent Leg	0,5642 GE	0,4846 GE	-
Premium Leg	1,1675 GE	3,7207 GE	4,3143 GE

Tab. 5: Contingent und Premium Leg eines Szenarios der Monte-Carlo-Simulation⁹¹

Da es bei dem dritten Referenztitel nicht zum Ausfallereignis während der Laufzeit kommt, erfolgt keine Ausgleichszahlung. Das Contingent Leg ist dementsprechend „null“. Nichtsdestotrotz müssen die zu zahlenden Prämien für diesen Referenztitel bis zum Ende der Laufzeit (und dementsprechend nicht bis zum Eintritt eines Ausfallereignisses) berücksichtigt werden. Um abschließend den fairen Spread des First-to-Default-, Second-to-Default- und

⁹⁰ Eigene Berechnungen in Anlehnung an: Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 207

⁹¹ Eigene Berechnungen in Anlehnung an: Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 207f.

Third-to-Default-Swaps berechnen zu können, sollten möglichst viele Szenarien simuliert werden. Um zu große Abweichungen zu verhindern, sollten mindestens 20.000 Simulationen durchgeführt werden.⁹² Anschließend müssen die Mittelwerte der Barwerte des Contingent Legs und des Premium Legs gebildet werden. Der Quotient der Mittelwerte aus beiden Legs entspricht letztlich dem fairen Default-Spread. Anhand von 1.000 durchgeführten Simulationen erhielt die A-Bank folgende Ergebnisse:⁹³

	First-to-Default	Second-to-Default	Third-to-Default
Fairer Spread	1,1087%	0,1848%	0,0123%

Tab. 6: Faire nth-to-default-Swap-Spreads bei 1.000 durchgeführten Simulationen⁹⁴

Nachdem die A-Bank auf diese Weise den nth-to-default-Swap bewertet hat, interessiert sie sich für den Zusammenhang zwischen der angenommenen Asset-Korrelation und den Spreads des nth-to-default-Swaps. Hierzu führt die A-Bank jeweils weitere 1.000 Simulationen für die Korrelationen $\rho \in \{0; 0,1; 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1\}$ durch und veranschaulicht die Ergebnisse anhand der nachfolgenden Abbildung:

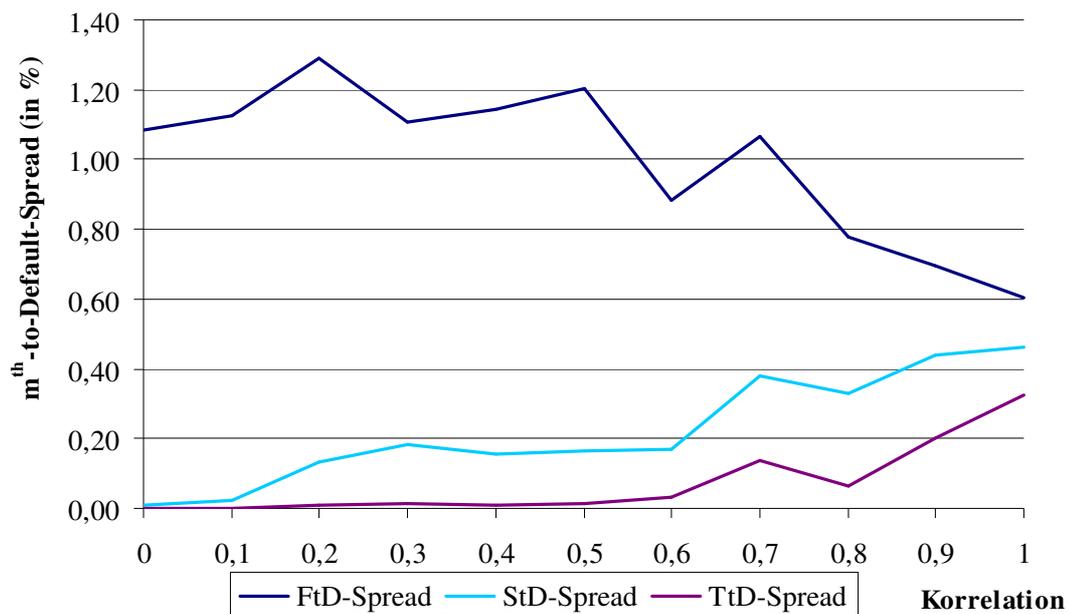


Abb. 9: Abhängigkeit des nth-to-Default-Spreads von der Basket-Korrelation⁹⁵

⁹² Vgl. Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 200

⁹³ Die Durchführung von 1.000 Simulationen ist für ein korrektes Pricing nicht ausreichend; da im Rahmen dieser Arbeit die grundsätzliche Vorgehensweise beschrieben werden soll und eine Ausweitung der Simulationsanzahl leicht möglich ist, wurde dies billigend in Kauf genommen.

⁹⁴ Eigene Berechnungen

Die Graphik zeigt deutlich, dass die fairen n^{th} -to-Default-Spreads bei steigender Asset-Korrelation konvergieren. Dabei zeigt sich, dass bei einer Asset-Korrelation von „null“ der faire FtD-Spread geringfügig oberhalb der Summe der individuellen CDS-Spreads des Baskets liegt und, dass der faire FtD-Spread bei einer Asset-Korrelation von „eins“ geringfügig oberhalb des weitesten individuellen CDS-Spreads des Baskets liegt. Das starke „Rauschen“ bei der Entwicklung der Spreads hängt mit der geringen Anzahl der Simulationen zusammen. Je höher die Anzahl der Simulationen gewählt wird, desto geringer werden diese Abweichungen. Daraus lässt sich folgern, dass hinsichtlich der Spreads und der Intensitäten der Referenztitel je nach Höhe der Korrelation gilt.⁹⁶

$$(62) \max(s_i) \leq s_0^{\text{FtD}} \leq \sum_{i=1}^m s_i \quad \text{bzw.} \quad \max(\tilde{\lambda}_i(t)) \leq \tilde{\lambda}_{\text{FtD}}(t) \leq \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i(t)$$

3.3.2 Einführung der mikroökonomischen Abhängigkeit

Ähnlich wie bei Unternehmenswertmodellen besteht die Idee zur Einführung der mikroökonomischen Abhängigkeit bei Intensitätsmodellen in der Einführung von Sprüngen. Bei Intensitätsmodellen werden jedoch die Intensitäten durch korrelierte Sprünge miteinander in Abhängigkeit gebracht. So kann beispielsweise die Intensität eines Unternehmens explizit von der Bonität der Geschäftspartner abhängig sein. Formal kann dies zum Beispiel über folgende Gleichung berücksichtigt werden:

$$(63) \tilde{\lambda}_i(t) = h_i(t) + \sum_{j \neq i} a_j \cdot N_j(t),$$

wobei h_i der Basisintensität bzw. der Intensität bei einem einzelnen bonitätssensitiven Finanztitel entspricht und N_j den Ausfallindikatorprozess des Unternehmens j gewichtet mit dem Parameter a_j darstellt. a_j muss dabei so gewählt werden, dass $\tilde{\lambda}_i$ nicht negativ ist. Um ein hierbei eventuell auftretendes Zirkularitätsproblem zu umgehen, besteht die Möglichkeit zu definieren, dass der Effekt immer nur von primären Unternehmen auf sekundäre Firmen ausgeübt wird.⁹⁷

⁹⁵ Eigene Berechnungen in Anlehnung an: Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 207ff.

⁹⁶ Vgl. Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 204ff.

⁹⁷ Für eine weiterführende Diskussion s. Schönbucher, Philipp J.: Credit Derivates Pricing Models: Models, Pricing and Implementation. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd., 2003. S. 321

3.4 Hybride Kreditrisikomodelle

3.4.1 Einführung der makroökonomischen Abhängigkeit

Da hybride Kreditrisikomodelle hinsichtlich des Eintritts eines Ausfallereignisses auf Unternehmenswertmodellen aufbauen, gelten für diese die Erkenntnisse des Abschnitts 3.2 hinsichtlich der makroökonomischen Abhängigkeit analog.⁹⁸

3.4.2 Einführung der mikroökonomischen Abhängigkeit

Die Einführung der mikroökonomischen Abhängigkeit bei hybriden Kreditrisikomodelle ist relativ gradlinig. Im Wesentlichen bestehen zwei Möglichkeiten eines Informationsdefizits: zum Einen hinsichtlich der Höhe der Ausfallschranke und zum Anderen hinsichtlich des Firmenwerts. In beiden Fällen ist die Vorgehensweise jedoch ähnlich. Kommt es bei unbekannter Höhe der Ausfallschranke zum Eintritt eines Ausfallereignisses, so kann dieser dazu genutzt werden, um daraus die Höhe der Ausfallschranken für die verbleibenden Unternehmen einzuschätzen. Konkret bedeutet dies, dass die getroffene Verteilungsannahme hinsichtlich der Ausfallschranke anhand der zusätzlichen Informationen aufgrund des unerwartet eingetretenen Ausfallereignisses überdacht und gegebenenfalls modifiziert werden kann. Eine Modifikation bedingt selbstverständlich eine erneute Kalkulation der Ausfallwahrscheinlichkeiten der verbleibenden Unternehmen.⁹⁹ Besteht ein Informationsdefizit hinsichtlich des Firmenwerts, so kann der Eintritt eines Ausfallereignisses analog genutzt werden, um die ursprünglichen Annahmen der Investoren hinsichtlich der Qualität der Unternehmensinformationen bei den verbleibenden Firmen zu überdenken und gegebenenfalls zu modifizieren. Je mehr unerwartete Ausfälle eintreten, desto wahrscheinlicher ist es, dass die ursprünglichen Annahmen der Investoren falsch waren.¹⁰⁰ In beiden Fällen erfolgen die empirisch zu beobachtenden Sprünge in den Credit Spreads einzelner Unternehmen aufgrund impliziter Informationsasymmetrien.¹⁰¹

3.5 Praxisbeispiel: Bewertung von Collateralized Debt Obligations

Funktionsweise. Collateralized Debt Obligations (CDO) stellen eine mögliche Verbriefungsform von Kreditrisiken dar. Hierbei wird ein relativ großes Portfolio von Referenztiteln in einzelne Tranchen eingeteilt, welche anschließend an Investoren verkauft werden. Anfallende Verluste in dem Portfolio werden zuerst der Tranche belastet, welche als „Equity Tranche“ oder „First Loss Piece“ bezeichnet wird. Erst, wenn diese Tranche durch

⁹⁸ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S. 59

⁹⁹ Ebenda

¹⁰⁰ Vgl. Collin-Dufresne, Pierre et al.: Are Jumps in Corporate Bond Yields Priced? Modeling Contagion via the Updating of Belief. Pittsburgh, USA, St. Louis, USA und Columbus, USA: Carnegie Mellon University, Washington University und Ohio State University, 2002. S. 15ff.

¹⁰¹ Vgl. Giesecke, Kay: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction. Ithaca, USA: Cornell University, 2004. S.59

anfallende Verluste komplett aufgezehrt ist, werden weitere Verluste der nächst höheren Tranche, welche als Mezzanine Tranche bezeichnet wird, belastet. Die höchste Tranche, welche erst dann von Verlusten betroffen ist, wenn alle anderen Tranchen bereits aufgezehrt sind, wird als „Senior Tranche“ oder auch als „Super Senior Tranche“ bezeichnet. Zwischen der Equity Tranche und der Senior Tranche liegen beliebig viele Mezzanine Tranchen. Während Investoren in Senior Tranchen dementsprechend das geringste Ausfallrisiko tragen, tragen Investoren in die Equity Tranche das höchste Ausfallrisiko. Gleichzeitig werden die Couponzahlungen sowie die Rückzahlung des Nominals (am Ende der Laufzeit) aus den zugrunde liegenden Referenztiteln zuerst an die Investoren der Senior Tranche, dann an die Investoren der Mezzanine Tranchen und letztlich an die Investoren der Equity Tranche verteilt. Diese Struktur wird oftmals als Wasserfall-Struktur bezeichnet.¹⁰² Folglich tragen die Investoren in die Equity Tranche das größte Risiko, was durch eine entsprechend höhere Verzinsung der Equity Tranche kompensiert wird, und Investoren in die Senior Tranche das geringste Risiko, weshalb diesen ebenso die geringste Verzinsung zusteht. Nachfolgende Abbildung veranschaulicht die Funktionsweise von CDO graphisch:

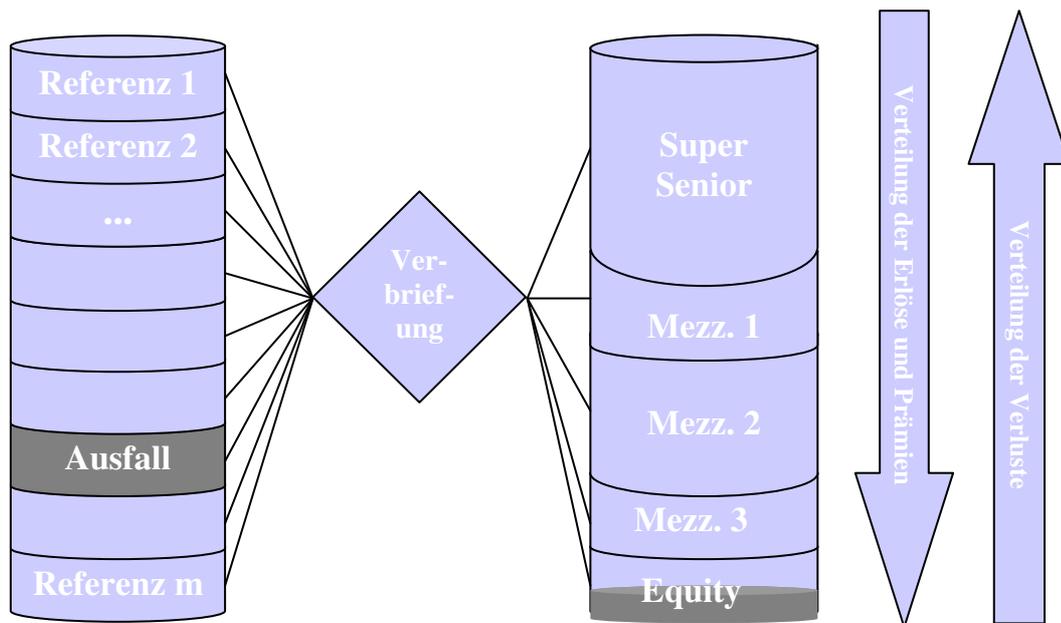


Abb. 10: Funktionsweise von Collateralized Debt Obligations¹⁰³

Eine Alternative zur klassischen Verbriefung von Referenztiteln über CDO stellen synthetische CDO dar. Diese beziehen sich nicht auf ein bereits vorhandenes Kreditportfolio,

¹⁰² Vgl. Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 48

¹⁰³ Vgl. ebd., S. 47

sondern auf einen Pool von Referenztiteln, welcher synthetisch über CDS-Kontrakte gebildet wird.

Grundlagen zur Bewertung von CDO. Unabhängig davon, ob es sich um eine klassische Verbriefung oder einen synthetischen CDO handelt, erfolgt die Zuordnung zu einzelnen Tranchen anhand sogenannter Tranchierungspunkte, welche auch als Attachment und Detachment Points bezeichnet werden. Diese bestimmen in Prozent des Nominals die Grenzen von und bis wann ein Investor die auftretenden Verluste in einem Portfolio zu tragen hat. Per Definition hat die Equity Tranche einen unteren Tranchierungspunkt von 0% und die Senior Tranche einen oberen Tranchierungspunkt von 100%. Daraus resultiert eine wesentliche Konsequenz für die Bewertung von CDO: im Gegensatz zu CDS- oder nth-to-default-Kontrakten ist nicht nur in „Totalausfall“ (abgesehen von der Recovery-Zahlung) und „Überleben“ des Referenztitels zu unterscheiden; vielmehr kann auch nur ein Teil einer Tranche ausfallen. Dementsprechend ist eine maßgebliche Größe bei der Bewertung von CDO anstelle von der Überlebenswahrscheinlichkeit in einem „Überlebensanteil“ $S_{[a,b]}$ zu sehen. Der Überlebensanteil gibt dabei den Anteil am zugrundeliegenden Referenzpool an, welcher nicht ausgefallen ist. Dabei ist gleichzeitig zu berücksichtigen, dass diese Definition auch Recovery-Zahlungen umfasst.¹⁰⁴ Solange die Verluste innerhalb eines Pools kumuliert geringer als der untere Tranchierungspunkt einer Tranche sind, ist der Investor dieser Tranche von den Ausfällen nicht betroffen. Übertreffen die Verluste den oberen Tranchierungspunkt, so erleidet der Investor einen Totalausfall. Zwischen beiden Tranchierungspunkten partizipiert der Investor mit jedem weiteren Ausfall linear.¹⁰⁵ Geht man von einem Portfolio mit 100 gleich großen Referenztiteln, welche alle eine identische Recovery-Rate von 40% aufweisen, aus, so ist ein Investor in eine Mezzanine Tranche mit einem unteren Tranchierungspunkt von 3% und einem oberen Tranchierungspunkt von 9%, von den ersten fünf Ausfällen im Portfolio nicht betroffen. Ab dem sechsten Ausfall partizipiert er linear bis zum 15. Ausfall. Mit diesem Ausfall (sowie bei Eintritt von weiteren Ausfällen) erleidet der Investor einen Totalverlust.¹⁰⁶ Nachfolgende Abbildung soll den Zusammenhang graphisch verdeutlichen:

¹⁰⁴ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 273

¹⁰⁵ Unter der im Allgemeinen getroffenen Annahme eines homogenen Portfolios, d.h. insbesondere bei identischem Nominal und Recovery-Zahlung aller Referenztitel

¹⁰⁶ Vgl. Martin, Marcus R.W. et al.: Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung. Vieweg Verlag: Wiesbaden, 2006. S. 50

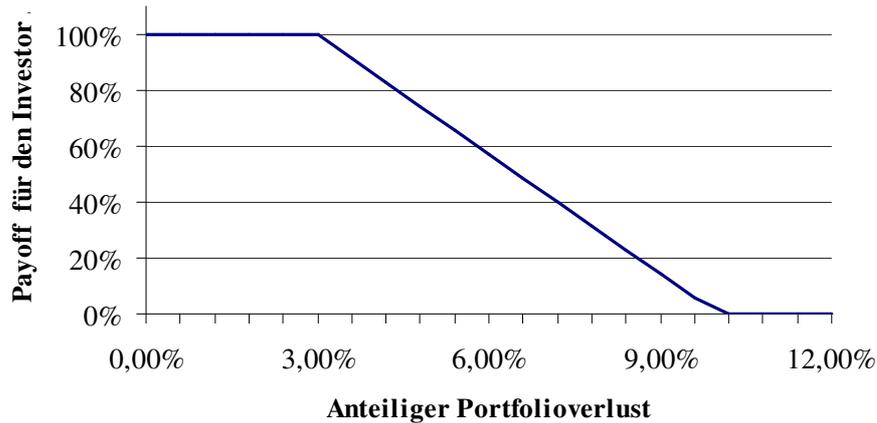


Abb. 11: Payoff-Profil eines Investors in eine Mezzanine Tranche eines CDO¹⁰⁷

Wie obige Abbildung deutlich macht, entspricht das Payoff-Profil eines Investors in einen CDO dem Payoff einer Investition in eine Put Spread Option. Nachfolgende Formel gibt den Payoff einer derartigen Put Spread Option an:

$$(64) \text{Payoff}_{[a,b]}(z) = \frac{1}{b-a} [\max(b-z, 0) - \max(a-z, 0)],$$

wobei a den unteren und b den oberen Tranchierungspunkt sowie z den anteiligen Portfolioverlust beschreiben. Um den Überlebensanteil bestimmen zu können, ist es notwendig letztere Formel mit der entsprechenden Verlustverteilung zu kombinieren.¹⁰⁸

Wird davon ausgegangen, dass das Kreditportfolio aus endlich vielen Referenztiteln besteht, welche alle das gleiche Nominal sowie eine identische Recovery-Rate aufweisen, so kann der Überlebensanteil anhand der folgenden Formel bestimmt werden:

$$(65) S_{[a,b]} = \sum_{i=0}^n \text{Payoff}_{[a,b]} \left(\frac{i}{n} \cdot (1 - \text{Rec}) \right) \cdot p(i),$$

wobei $p(i)$ die Ausfallwahrscheinlichkeit von i Ausfällen innerhalb des Portfolios bestehend aus n Referenztiteln angibt. Man beachte, dass das z aus der Payoff-Formel als der Verlust bei i Ausfällen und nicht als die Anzahl der Ausfälle selbst definiert ist.¹⁰⁹

¹⁰⁷ Eigene Berechnungen in Anlehnung an: Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 274

¹⁰⁸ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 274f.

¹⁰⁹ Ebenda.

Sobald das Portfolio aus ungleich gewichteten Referenztiteln besteht oder bei den Referenztiteln von unterschiedlichen Recovery-Raten auszugehen ist, muss $p(i)$ durch Dichtefunktion der Ausfallwahrscheinlichkeit $p(z)$ mit $0 \leq z \leq 1$ ersetzt werden:¹¹⁰

$$(66) S_{[a,b]} = E^Q[\text{Payoff}_{[a,b]}] = \int_0^1 \text{Payoff}_{[a,b]}(z) \cdot p(z) dz$$

Die Variable z beschreibt dabei den Portfolioverlust in Prozent unter Berücksichtigung der Recovery-Zahlung.

Nachfolgende Abbildung soll den Zusammenhang zwischen der Dichtefunktion der Ausfallwahrscheinlichkeit und der Asset-Korrelation verdeutlichen. Obwohl allen Verteilungen die gleiche durchschnittliche Wahrscheinlichkeit zugrunde liegt, zeigt die Graphik deutlich, dass mit steigender Asset-Korrelation die Konzentration der Wahrscheinlichkeitsmasse am linken Rand zunimmt. Versucht man die nachfolgenden Graphen mit dem Graph der Payoff-Struktur zu kombinieren, so wird deutlich, dass der Überlebensanteil stark von der Dichtefunktion der Ausfallwahrscheinlichkeit und somit von der Asset-Korrelation abhängig ist.¹¹¹

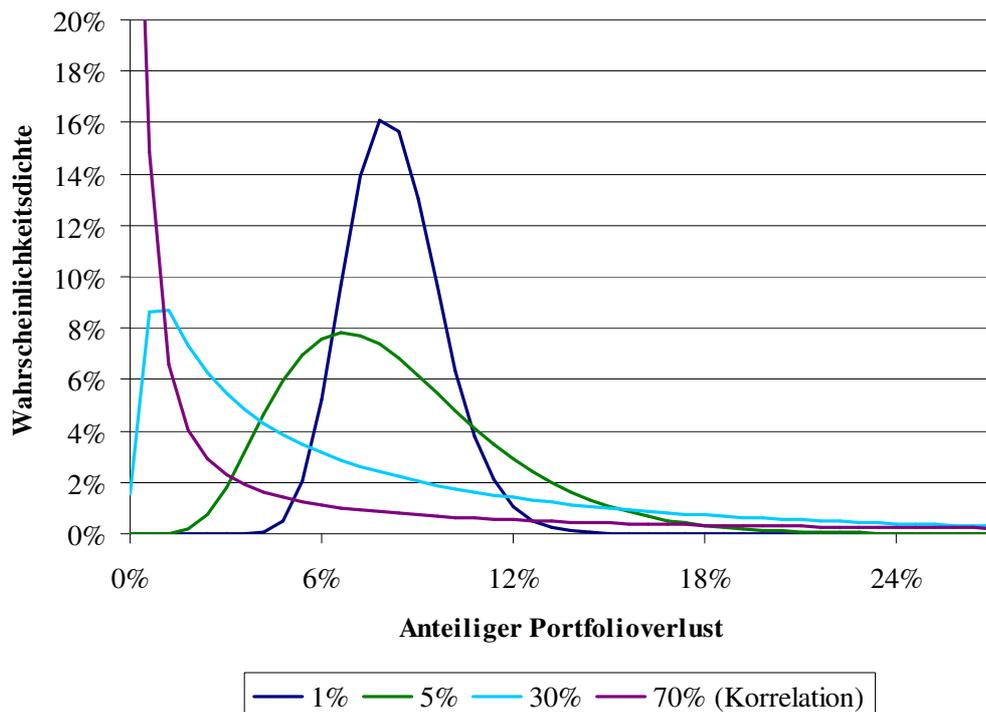


Abb. 12: Dichtefunktion der Ausfallwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Asset-Korrelation¹¹²

¹¹⁰ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 274f.

¹¹¹ Vgl. ebd., S. 276

¹¹² In Anlehnung an: Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 277

Bewertung von CDO anhand des Homogenous Large Portfolio Gaussian Copula-Modells. Das Homogenous Large Portfolio Gaussian Copula-Modell, kurz HLPGC, stellt das wohl am häufigsten verwendete Modell zur Bewertung von CDO dar und bildet – trotz der Modell-inhärenten Unvollkommenheiten – den Marktstandard zur Preisquotierung von standardisierten CDO Tranchen auf Kreditindizes.¹¹³ Daher soll anhand dieses Modells im Folgenden ein Weg zur Bewertung von CDO aufgezeigt werden. Bereits der Name des Modells weist auf die wesentlichen, im Rahmen des Modells getroffenen, Annahmen hin. Bevor jedoch auf die zugrunde liegenden Annahmen eingegangen wird, soll an dieser Stelle angemerkt werden, dass das HLPGC-Modell auf dem Ein-Faktor-Modell nach Vasicek aufbaut, wie es bereits in Abschnitt 3.2.1.2 beschrieben wurde. Die erste Annahme des HLPGC-Modells besteht darin, dass das zugrunde liegende Portfolio als homogen angesehen wird. Dies bedeutet insbesondere, dass sämtliche Referenztitel über ein identisches Nominal, einer identischen zeitabhängigen Ausfallwahrscheinlichkeit \bar{p} , einer identischen Recovery-Rate und einer identischen Korrelation verfügen. In der Regel wird darüber hinaus die Annahme getroffen, dass sich die Ausfallwahrscheinlichkeit anhand nachfolgender Approximation ergibt:¹¹⁴

$$(67) \quad \bar{p} = 1 - e^{-\frac{\bar{s}T}{1-Rec}},$$

wobei \bar{s} den (identischen) Spread der Referenztitel beschreibt.

Da Kreditportfolien in der Realität meist heterogen ist, liegt dieser Annahme letztlich die Idee zugrunde, dass die Bildung eines (gewichteten) Durchschnitts für die Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit ausreichend ist. Damit stellt die erste Annahme gegenüber der Realität eine starke Vereinfachung dar.

Die zweite Annahme besagt, dass dem Modell ein (unendlich) großes Kreditportfolio zugrunde gelegt wird. Auf diese Weise wird gewährleistet, dass die Verlustverteilung kontinuierlich ist. Da CDO meist große Kreditportfolien zugrunde gelegt werden, ist diese Annahme unkritisch.¹¹⁵

Die dritte und letzte Annahme beschreibt die Abhängigkeitsstruktur der Ausfälle. Als Abhängigkeitsstruktur wird die Gauss'sche Copula angenommen. Letztlich besagt dies, dass die Ausfallkorrelation indirekt durch die Asset-Korrelationen zwischen den einzelnen Referenztiteln modelliert wird. Dies geschieht, wie in Abschnitt 3.2.1.2 beschrieben, indem als Verteilung des Makro-Faktors X und als Verteilung des idiosynkratischen Faktors Z_i jeweils die Standardnormalverteilung zugrunde gelegt wird. Diese Verteilungsannahme bedingt, dass gemäß Formel (15) auch der Firmenwert W_i standardnormalverteilt sein muss. Obwohl wissenschaftliche Studien zeigen, dass die Annahme der Gauss'schen Copula als

¹¹³ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 296

¹¹⁴ Vgl ebd., S. 292f.

¹¹⁵ Ebenda.

Abhängigkeitsstruktur suboptimal ist, erfreut sich diese Vorgehensweise in der Praxis sowohl einer weiten Verbreitung als auch einer großen Akzeptanz.¹¹⁶

Zur Bewertung eines fünfjährigen CDO anhand des HPLGC-Modells wird ein Portfolio bestehend aus 100 gleich gewichteten Referenztiteln zugrunde gelegt, wobei die Anzahl der Referenztitel als „ausreichend groß“ im Sinne der Annahme großer Portfolien gelten soll. Darüber hinaus sei angenommen, dass der durchschnittliche Spread der Referenztitel bei 100 bps liegt und die Recovery-Zahlung bei Ausfall 40% beträgt. Gemäß Formel (67) ergibt sich daraus eine durchschnittliche Ausfallwahrscheinlichkeit von 8,00%. Da dem Modell per Definition die Gauss'sche Copula zugrunde liegt, kann die durchschnittliche (unbedingte) Ausfallwahrscheinlichkeit von 8,00% über Formel (16) in eine bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit $\bar{p}(X)$ transformiert werden. Ebenso folgt aus der Annahme, dass dem Portfolio eine (unendlich) große Anzahl an Referenztiteln zugrunde liegt, dass der Anteil der Referenztitel, die erwartungsgemäß ausfallen werden, bereits anhand der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit gegeben ist. Somit kann der ansonsten notwendige Schritt, die bedingte Wahrscheinlichkeit für i Ausfälle in dem Portfolio zu kalkulieren, entfallen. Folglich kann direkt aus der Kombination der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit und dem Payoff in Abhängigkeit von dem Makro-Faktor X der Überlebensanteil berechnet werden. Dies geschieht anhand der nachfolgenden Formel:¹¹⁷

$$(68) S_{[a,b]} = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Payoff}_{[a,b]}(z) \cdot \varphi(X) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Payoff}_{[a,b]}(\bar{p}(X) \cdot (1 - Rec)) \cdot \varphi(X) dx ,$$

wobei $\varphi(X)$ die Dichtefunktion des Makro-Faktors bezeichnet.

Bei obiger Gleichung ist insbesondere zu beachten, dass z sich aus der Multiplikation der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit mit dem Loss Given Default ergibt. Das Produkt stellt den erwarteten Verlustanteil dar.

Geht man des weiteren davon aus, dass der zu bewertende CDO aus drei Tranchen besteht, wobei für die Mezzanine Tranche als unteren Tranchierungspunkt 3% und als oberen Tranchierungspunkt 10% gegeben sind, so berechnen sich die Überlebensanteile bzw. Spreads für diese Tranche gemäß dem HPLGC-Modell anhand der in nachfolgender Tabelle mit einer Korrelation von 30% exemplarisch aufgezeigten Berechnungsschritte. Dabei ist zu beachten, dass die Tabelle nur einen Ausschnitt der gesamten zugrunde liegenden Berechnung aufzeigt und, dass die Spreads aus Vereinfachungsgründen approximativ über die folgende, in der Praxis gängige, Formel aus den Überlebensanteilen errechnet wurden.

$$(69) s = \frac{-\ln(S_{[a,b]})}{T}$$

¹¹⁶ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 293

¹¹⁷ Vgl. ebd., S. 294

Makro-Faktor X	Dichte von X (in %)	Bedingte Ausfall-wahrscheinlichkeit $p(X)$ (in %)	Erwarteter Verlust z (in %)	Bedingter Über-lebensanteil $S_{[3\%,10\%]}(X)$ (in %)	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
-1,20	19,4186	18,5620	11,1372	0,0000	
-1,10	21,7852	16,8623	10,1174	0,0000	
-1,00	24,1971	15,2661	9,1597	12,0044	
-0,90	26,6085	13,7735	8,2641	24,7983	
-0,80	28,9692	12,3837	7,4302	36,7109	
-0,70	31,2254	11,0952	6,6571	47,7555	
-0,60	33,3225	9,9056	5,9434	57,9516	
-0,50	35,2065	8,8122	5,2873	67,3242	
-0,40	36,8270	7,8113	4,6868	75,9029	
-0,30	38,1388	6,8992	4,1395	83,7214	
-0,20	39,1043	6,0714	3,6428	90,8166	
-0,10	39,6953	5,3234	3,1940	97,2280	
0,00	39,8942	4,6504	2,7902	100,0000	
0,10	39,6953	4,0475	2,4285	100,0000	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
				$S_{[3\%,10\%]}$	73,2188%
				Fairer Spread s	623,4369 bps

 Tab. 7: Exemplarische Berechnung des Spreads einer Mezzanine Tranche eines CDO¹¹⁸

Obige Tabelle macht die Bewertungslogik des HLPGC-Modells deutlich: geht man davon aus, dass sich das makroökonomische Umfeld in einem Stadium von $X = 0,00$ befinden würde, so würde dies bedingen (unter Einbeziehung der oben getroffenen Annahmen), dass das gesamte Portfolio mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,6504% ausfallen würde. Unter Berücksichtigung der Recovery-Zahlung von 40% würde dies einen erwarteten Verlust von 2,7902% des Portfolios bedeuten. Dementsprechend wäre bei einem derartigen Umweltzustand ein Investor in eine Mezzanine Tranche mit unterem Tranchierungspunkt von

¹¹⁸ Eigene Berechnungen in Anlehnung an: Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies, Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 294f.

3% nicht von dem Portfolioverlust betroffen. Seine Auszahlungsquote bzw. sein Überlebensanteil würde für ihn 100% betragen. Geht man weiter davon aus, dass sich die wirtschaftliche Lage von 0,00 auf -0,10 verschlechtern würde, so würde logischerweise die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit steigen, was zu einer Erhöhung des erwarteten Portfolioverlust auf 3,1940% führen würde. Da der erwartete Portfolioverlust nun oberhalb des unteren Tranchierungspunkts der Mezzanine Tranche liegen würde, müsste ein Investor in eine derartige Tranche einen Teilverlust hinnehmen. Seine Auszahlungsquote würde nur noch 99,2280% betragen. Würde sich das makroökonomische Umfeld auf einen Zustand von -1,1 oder niedriger verschlechtern, so würde der erwartete Portfolioverlust den oberen Tranchierungspunkt übersteigen. Der Investor würde somit leer ausgehen. Durch Integration über sämtliche möglichen Umweltzustände ergibt sich ein erwarteter Überlebensanteil bzw. eine erwartete Auszahlungsquote von 73,2188%. Um den erwarteten Verlust für den Investor auszugleichen, wäre gemäß Gleichung (69) ein Spread von 623,4369 bps. „fair“.

Wird eine derartige Analyse für alle drei Tranchen sowie für unterschiedlich hoch angenommene Asset-Korrelationen durchgeführt, so ergeben sich die in nachfolgender Tabelle zusammengefassten Überlebensanteile bzw. Spreads:

ρ	Equity Tranche		Mezzanine Tranche		Senior Tranche	
	$S_{[0\%,3\%]}$	s	$S_{[3\%,10\%]}$	s	$S_{[10\%,100\%]}$	s
1%	0,0695%	145,4251%	74,2940%	5,9428%	100,0000%	0,0000%
10%	10,4186%	45,2315%	71,9865%	6,5738%	99,8345%	0,0331%
30%	31,0359%	23,4005%	73,2188%	6,2344%	99,0514%	0,1906%
50%	47,5697%	14,8595%	76,3341%	5,4010%	98,2580%	0,3515%
70%	62,6721%	9,3451%	80,2311%	4,4052%	97,4515%	0,5163%
90%	78,4661%	4,8501%	85,5437%	3,1229%	96,5118%	0,7101%

Tab. 8: Auszahlungsquoten und faire Spreads der einzelnen CDO Tranchen bei unterschiedlicher Korrelation¹¹⁹

Wie obige Tabelle belegt, hat die Höhe der Asset-Korrelation – wie bereits Abb. 12 vermuten lies – einen deutlichen Einfluss auf den fairen Spread der jeweiligen Tranche. Die Tabelle zeigt, dass während der faire Spread der Equity Tranche mit steigender Korrelation stark abnimmt, der faire Spread der Senior Tranche mit steigender Korrelation zunimmt. Macht man sich bewusst, dass bei einer Korrelation von „null“ der Eintritt von Ausfallereignisses lediglich von der individuellen Ausfallwahrscheinlichkeit (hier: 8,00%) abhängig ist, so folgt für das Beispiel daraus, dass der erwartete Portfolioverlust für jeden Umweltzustand konstant

¹¹⁹ Eigene Berechnungen

bei 4,80% (= 8% mal Loss Given Default) „verharrt“. Für die Equity Tranche würde dies bedeuten, dass erwartet wird, dass diese vollständig ausfällt, da der erwartete Portfolioverlust oberhalb des oberen Tranchierungspunktes liegt. Der faire Spread zur Kompensation des erwarteten Verlustes würde daher gegen „unendlich“ gehen. Im Gegensatz dazu wäre die Senior Tranche von dem erwarteten Portfolioverlust überhaupt nicht betroffen. Der faire Spread wäre also „null“. Mit steigender Korrelation werden extreme Ereignisse wahrscheinlicher. Für einer Korrelation von „eins“ bedeutet dies, dass es entweder zu keinem Ausfall oder zu einem Totalausfall des Portfolios kommt.¹²⁰ Dementsprechend steigt die Wahrscheinlichkeit, dass der erwartete Portfolioverlust oberhalb des unteren Tranchierungspunktes der Senior Tranche liegt und somit steigt für die Senior Tranche auch das Risiko von Verlusten betroffen zu sein. Der faire Spread der Senior Tranche muss dementsprechend ebenfalls ansteigen, um dieses Risiko zu kompensieren. Genau gegenteilig verhält es sich mit der Equity Tranche: da diese immer (solange eine Ausfallwahrscheinlichkeit > 0 angenommen wird) von zu erwartenden Portfolioausfällen betroffen ist und eine Unabhängigkeit vom jeweiligen Umweltzustand lediglich dazu führt, dass ein Investor in eine Equity Tranche mit Sicherheit den erwarteten Portfolioverlust in Höhe der Ausfallwahrscheinlichkeit multipliziert mit dem Loss Given Default tragen muss, profitiert dieser bei einer steigenden Asset-Korrelation davon, dass ein positives makroökonomisches Umfeld dazu führt, dass sich die Ausfallwahrscheinlichkeit reduziert. D.h. konkret, dass es bei einer Korrelation von „eins“ einerseits zwar bei einem negativen makroökonomischen Umfeld zu einem Totalausfall kommt, andererseits aber bei einem positiven makroökonomischen kein Ausfall stattfindet. Die Chance des Investors in eine Equity Tranche darauf, dass kein Ausfall stattfindet, steigt somit bei zunehmender Asset-Korrelation. Dementsprechend muss der faire Spread geringer werden. Da die Mezzanine Tranche zwischen der Equity und der Senior Tranche liegt und somit beide soeben beschriebenen Effekte auf diese einwirken, ist für diese kein klarer Trend abzuleiten. Die Entwicklung des Spread der Mezzanine Tranche hängt vielmehr von der Wahl der Tranchierungspunkte sowie von der Ausfallwahrscheinlichkeit ab.

Kritische Würdigung des HLPGC-Modells. Wie bei jedem Modell können die diesem zugrunde gelegten Annahmen zu einer wesentlichen Beeinträchtigung der Realitätsnähe des Modells führen. Im Folgenden sollen die drei wesentlichen Annahmen des HLPGC-Modells, also die Annahme eines (unendlich) großen Portfolios, die Annahme eines homogenen Portfolios und die Annahme der Gauss'schen Copula als Abhängigkeitsmaß, kurz kritisch beleuchtet werden. Wie bereits im Rahmen der Modellbeschreibung erwähnt, ist die Annahme, dass ein relativ großes Portfolio betrachtet wird, relativ unkritisch. Würde diese Annahme fallen gelassen, so würde das Modell eine diskrete anstelle einer kontinuierlichen Verteilungsfunktion aufweisen, was relativ wenig Einfluss auf die Realitätsnähe der Ergebnisse des Modells hätte. Kritischer sind dagegen die beiden anderen Annahmen.

¹²⁰ Ein „Totalausfall“ bezeichnet hier den Ausfall sämtlicher Referenztitel, was die entsprechenden Recovery-Zahlungen auslöst; ein gleichzeitiger Ausfall der Recovery-Zahlungen ist damit nicht gemeint.

Betrachtet man die Annahme eines homogenen Portfolios, was insbesondere identische Ausfallwahrscheinlichkeiten und Recovery-Raten über die Laufzeit und somit identische Spreads der Referenztitel sowie implizit eine flache Struktur der Spreadkurve bedingt, so ist offensichtlich, dass hier eine erhebliche Vereinfachung der Realität vorgenommen wird. Insbesondere die Annahme identischer Ausfallwahrscheinlichkeiten und somit identischer Spreads bzw. alternativ die Bildung von durchschnittlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten und Spreads stellt eine erhebliche Vereinfachung des Modells dar, da die Streuung der Spreadhöhe Auswirkungen auf den fairen Wert des CDO hat.¹²¹ Da der Effekt aus der Berücksichtigung der Streuung der Spreads relativ komplex und im Rahmen dieser Arbeit nicht zielführend ist, soll für einen detaillierten Vergleich zwischen heterogenen und homogenen Portfolios auf Felsenheimer, Jochen et. al.: *Active Credit Portfolio Management* ab S. 296 verwiesen werden. Die Annahme einer flachen Struktur der Spreads ist dagegen relativ unproblematisch, da die Berechnung ebenso anhand einer durchschnittlichen Strukturkurve der Spreads vorgenommen werden kann, sofern eine derartige vorliegt.¹²² Ebenso ist auch die Einbindung eines geeigneten Abhängigkeitsmaßes für die Bewertung maßgeblich. Während die Gauss'sche Copula den Marktstandard abbildet, gibt es in der Wissenschaft hinreichende empirische Untersuchungen, welche darlegen, dass – wie bereits beschrieben – die Verwendung anderer Copulae zu bevorzugen ist. Hierbei sind insbesondere Untersuchungen unter Einbindung der Student t-Copula, der Normal Inverse Gaussian Copula, der Double t-Copula oder der Clayton-Copula zu nennen.¹²³ Die Implementierung anderer Copulae ist meist durch geringfügige Modifizierung des Modells relativ einfach möglich. Darüber hinaus ist eine Berücksichtigung der mikroökonomischen Abhängigkeitseffekte notwendig. Abschließend ist anzumerken, dass alle drei Modellannahmen für Modelle, die sich mit der Bewertung von CDO auseinandersetzen, typisch sind. Weiterentwicklungen des HPLGC-Modells setzen meist an einem der beiden kritischsten Annahmen, also der Annahme eines homogenen Portfolios sowie der Annahme hinsichtlich der Abhängigkeitsstruktur, an und versuchen die jeweilige Annahme aufzuheben.

¹²¹ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: *Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies*. Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 293

¹²² Ebenda.

¹²³ Hierzu vgl. unter Anderem die folgenden Arbeiten: Kalemanova, Anna et al.: *The Normal inverse Gaussian distribution for synthetic CDO pricing*. München und London: risklab germany, Algorithmics Inc. und Allianz, 2005 sowie Burtschell, Xavier et al.: *A comparative analysis of CDO pricing models*. Paris und Lyon: BNP Paribas und Université de Lyon, 2008 sowie Hull, John et al.: *The Valuation of Correlation-Dependent Credit Derivatives Using a Structural Model*. Toronto: University of Toronto – Joseph L. Rotman School of Management, 2005 sowie Hull, John et al.: *Dynamic Models of Portfolio Credit Risk: A Simplified Approach*, in: *Journal of Derivatives* Vol 15, 2008.

4. Fazit

Die vorangegangene Analyse der grundlegenden Kreditrisikomodelle im Portfoliofall hat gezeigt, dass Kreditrisikomodelle zur Bewertung von kreditrisikobehafteten Finanztiteln bedingt geeignet sind. Je stärker ein Kreditrisikomodell durch realitätsverzerrende Annahmen von der Abbildung der Realität abweicht, desto größer sind in der Regel die Abweichungen von der „korrekten“ Bewertung. Gleichzeitig hat sich gezeigt, dass durch Verfeinerungen der ursprünglich rudimentären Modelle die Genauigkeit bei der Bewertung deutlich gesteigert werden kann. Als „Verfeinerung“ der Modelle dienen zum Einen Weiterentwicklungen der ursprünglichen Modelle, wobei Schwächen dieser Modelle aufgegriffen und gezielt behoben werden sollen, und zum Anderen die bewusste Kalibrierung der jeweiligen Modelle anhand adäquater Marktdaten. Da selbst weit entwickelte Modelle auf mehr oder weniger stark realitätsvereinfachenden Annahmen beruhen und es teilweise an adäquaten Marktdaten mangelt, ist ein gewisses inhärentes Modellrisiko nicht auszuschließen. Eine kritische Hinterfragung der Modellergebnisse ist deshalb unerlässlich. Grundsätzlich könnte die Bewertung anhand von Marktdaten, das sog. mark-to-market, eine Alternative zu der Bewertung anhand von Modellen, dem sog. mark-to-model, darstellen. Dies bedeutet, dass anstelle der Bewertung anhand von meist komplexen Modellen, welche oftmals nur von darauf spezialisierten Marktteilnehmern angewendet werden können und daher relativ intransparent sind, die Bewertung anhand von Angebot und Nachfrage über den Markt vorgenommen wird, was die Transparenz deutlich erhöhen würde.¹²⁴ Voraussetzung hierfür ist, dass der Markt über eine entsprechende Liquidität verfügt. An dieser Stelle sei angemerkt, dass bis ein (neuer) Markt über eine derartige Liquidität verfügt, eine Bewertung anhand von Modellen nötig ist. Aber selbst, wenn ein Markt über die benötigte Liquidität verfügt, ist eine reine mark-to-market-Bewertung kaum ausreichend. Vielmehr werden beide Bewertungsmethoden gemeinsam benötigt: einerseits müssen die Bewertungsmechanismen flexibel genug sein, um Preisschwankungen am Kreditmarkt zu berücksichtigen, und andererseits werden Modelle benötigt, um Risikofaktoren identifizieren und quantifizieren zu können.¹²⁵ Dementsprechend werden Kreditrisikomodelle insbesondere benötigt, um alle Risiken einer Transaktion zu hedgen, welche nicht eingegangen werden sollen. So werden beispielsweise bei der Auflage eines synthetischen Single-Tranche CDO, welches einen CDO bezeichnet, bei welchem in der Regel nur eine Tranche an einen Investor veräußert wird, während das Kreditinstitut die restlichen Tranchen behält, Modelle benötigt, um die Risiken aus den verbleibenden Tranchen bewerten und hedgen zu können. Letztlich kann das Unernehmen mit dem besten Modell den konkurrenzfähigsten Preis stellen und somit langfristig Marktanteile gewinnen.¹²⁶

¹²⁴ Vgl. Felsenheimer, Jochen et al.: Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies. Weinheim: Wiley Verlag, 2006. S. 300f.

¹²⁵ Ebenda.

¹²⁶ Ebenda.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Bewertung anhand von Modellen einerseits zwar gewisse modell-inhärente Risiken mit sich bringt, aber andererseits Modelle notwendig sind, um die Risiken aus den kreditrisikobehafteten Finanztiteln identifizieren, quantifizieren und gegebenenfalls hedgen zu können.

Literaturverzeichnis

- Albrecht, Peter: *Kreditrisiken – Modellierung und Management: Ein Überblick*, in: German Risk and Insurance Review, 2005.
- Arvantis, Angelo und Gregory, Jon: *Credit: The complete guide to pricing, hedging and risk management*. London: Risk Waters Group Ltd., 2001.
- Beck, Andreas und Lesko, Michael und Schlottmann, Frank und Wimmer, Konrad: *Copulas im Risikomanagement*, in: Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen Ausgabe 14, 2006.
- Bielecki, Tomasz R. und Rutkowski, Marek: *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2004.
- Black, Fischer und Cox, John C.: *Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions*, in: Journal of Finance Vol. 31, 1976.
- Black, Fischer und Scholes, Myron: *The pricing of options and corporate liabilities*, in: Journal of Political Economy Vol. 81, 1973.
- Burghof, Hans-Peter und Henke, Sabine und Rudolph, Bernd und Schönbucher, Philipp J. und Sommer, Daniel: *Kreditderivate – Handbuch für die Bank und Anlagepraxis*. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2005.
- Burghof, Hans-Peter und Paul, Stephan und Rudolph, Bernd: *Kreditrisiken und Kreditmärkte*, in: Burghof, Hans-Peter et al.: *Kreditderivate – Handbuch für die Bank und Anlagepraxis*. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2005.
- Burtschell, Xavier und Gregory, Jon und Laurent, Jean-Paul: *A comparative analysis of CDO pricing models*. Paris und Lyon: BNP Paribas und Université de Lyon, 2008.
- Cherubini, Umberto und Luciano, Elisa und Vecchiato, Walter: *Copula Methods in Finance*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2004.
- Collin-Dufresne, Pierre und Goldstein, Robert S. und Helwege, Jean: *Are Jumps in Corporate Bond Yields Priced? Modeling Contagion via the Updating of Belief*. Pittsburgh, USA, St. Louis, USA und Columbus, USA: Carnegie Mellon University, Washington University und Ohio State University, 2002.
- Duffie, Darrell und Gârleanu, Nicolae: *Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligations*. Stanford, USA: Stanford University, Graduate School of Business, 2003.
- Duffie, Darrell und Lando, David: *Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information*, in: Econometrica, Vol. 69, No. 3, May 2001
- Ericsson, Jan und Reneby, Joel und Wang, Hoa: *Can Structural Models Price Default Risk? Evidence from Bond and Derivative Markets*. Montreal, Kanada und Stockholm, Schweden: McGill University und Stockholm School of Economics, 2006.

- Felsenheimer, Jochen und Gisdakis, Philip und Zaiser, Michael: *Active Credit Portfolio Management – A Practical Guide to Credit Risk Management Strategies*, Weinheim: Wiley Verlag, 2006.
- Giesecke, Kay: *Default Compensator, Incomplete Information, and the Term Structure of Credit Spreads*. Berlin: Department of Economics der Humboldt-Universität zu Berlin, 2001.
- Giesecke, Kay: *Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction*. Berlin: Humboldt-Universität, 2002.
- Giesecke, Kay: *A Simple Exponential Model for Dependent Defaults*, in: *Journal of Fixed Income* Vol. 13, 2003.
- Giesecke, Kay und Weber, Stefan: *Cyclical Correlations, Credit Contagion, and Portfolio Losses*. Ithaca, USA: Cornell University sowie Berlin: Technische Universität Berlin, 2003.
- Giesecke, Kay: *Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction*. Ithaca, USA: Cornell University, 2004.
- Giesecke, Kay und Goldberg, Lisa R.: *Forecasting Default in the Face of Uncertainty*, in: *The Journal of Derivatives* Vol. Fall/04, 2004.
- Giesecke, Kay: *Default and Information*, in: *Journal of Economic Dynamics & Control* Vol. 30, 2006.
- Grundke, Peter: *Modellierung und Bewertung von Kreditrisiken*. Dissertation an der Universität zu Köln. Wiesbaden: Der Deutsche Universitätsverlag 2003.
- Handelsblatt: *Die Aufseher ziehen die Zügel an*. [Ausgabe vom 17.06.2008]
- Handelsblatt: *Neutralität nicht garantiert*. [Ausgabe vom 02.07.2008]
- Handelsblatt: *Sturm über Wall Street*. [Ausgabe vom 17.06.2008]
- Horat, Robert: *Kreditderivate – Variantenreiche Finanzinstrumente mit Potential für die Praxis*, in: *Der Schweizer Treuhänder*, November 2003.
- Hull, John und White, Alan: *The Valuation of Correlation-Dependent Credit Derivatives Using a Structural Model*. Toronto: University of Toronto – Joseph L. Rotman School of Management, 2005.
- Hull, John und White, Alan: *Dynamic Models of Portfolio Credit Risk: A Simplified Approach*, in: *Journal of Derivatives* Vol. 15., 2008.
- Hüttemann, Petra: *Derivate Instrumente für den Transfer von Kreditrisiken*, in: Oehler, Andreas: *Credit Risk und Value-at-Risk Alternativen – Herausforderungen für das Risk Management*. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 1998.
- J.P. Morgan: *The J.P.Morgan Guide to Credit Derivatives*, in: Risk Publications, 1999.

- Jarrow, Robert A. und Lando, David und Turnbull, Stuart M.: *A markov model of the term structure of credit risk spreads*, in: Review of financial studies Vol. 10, 1997.
- Jarrow, Robert: *Default parameter estimation using market prices*, in: Financial Analysts Journal Vol. 5, 2001.
- Jones, E. Philip und Mason, Scott P. und Rosenfeld, Eric: *Contingent claims analysis of corporate capital structures: an empirical investigation*, in: Journal of Finance, Vol. 39, 1984.
- Jortzik, Stephan: *Semi-analytische und simulative Kreditrisikomessung synthetischer Collateralized Debt Obligations bei heterogenen Referenzportfolios*. Dissertation an der Universität Göttingen. Göttingen, 2005.
- Kalemanova, Anna und Schnid, Bernd und Werner, Ralf: *The Normal inverse Gaussian distribution for synthetic CDO pricing*. München und London: risklab germany, Algorithmics Inc. und Allianz, 2005.
- Koziol, Philipp: *Auswahl von Copulas zur Bewertung von Basketkreditderivaten*. Vallendar: WHU – Otto Beisheim School of Management, 2005.
- Läger, Volker: *Bewertung von Kreditrisiken und Kreditderivaten*. Bad Soden/Ts.: Uhlenbruch Verlag, 2002.
- Lando, David: *Credit Risk Modeling – Theory and Applications*, in: Princeton University Press: Princeton, New Jersey, 2004.
- Lando, David: *On cox processes and credit risky securities*, in: Review of Derivatives Research Vol. 2, 1998.
- Li, David X.: *On Default Correlation: A Copula Function Approach*, in: Riskmetrics: Working Paper Number 99-07, 2000.
- Martin, Marcus R.W. und Reitz, Stefan und Wehn, Carsten S.: *Kreditderivate und Kreditrisikomodelle – Eine mathematische Einführung*. Wiesbaden: Vieweg Verlag, 2006.
- Merton, Robert C.: *On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates*, in: Journal of Finance Vol. 29, 1974.
- Modigliani, Franco und Miller, Merton: *The cost of capital, corporation finance and the theory of investment*, in: American Economic Review Vol. 48, 1958.
- Müller, Frank: *Kreditderivate und Risikomanagement*. Frankfurt am Main: Bankakademie-Verlag GmbH, 2000.
- Musiela, Marek und Rutkowski, Marek: *Martingale Methods in Financial Modelling*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2005.
- Nelson, Roger: *An Introduction to Copulas*. New York: Springer Verlag, 1999.

- Neske, Christian: *Grundformen von Kreditderivaten*, in: Burghof, Hans-Peter et al.: *Kreditderivate – Handbuch für die Bank und Anlagepraxis*. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2005.
- Posthaus, Achim: *Exotische Kreditderivate*, in: Burghof, Hans-Peter et al.: *Kreditderivate – Handbuch für die Bank und Anlagepraxis*. Stuttgart: Schäffer-Poeschel Verlag, 2005.
- Rehm, Florian Christoph: *Kreditrisikomodelle – Bewertung von Kreditderivaten und Portfoliomodelle zur Kreditrisikomessung*. Dissertation an der Wissenschaftlichen Hochschule für Unternehmensführung – Otto-Beisheim-Hochschule – Vallendar. Koblenz, 2001.
- Schierenbeck, Henner: *Ertragsorientiertes Bankmanagement – Band 3: Fallstudien mit Lösungen*. Wiesbaden: Gabler Verlag, 2005.
- Schmidt, Thorsten: *Credit Risk Modeling with Random Fields*. Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades an den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen (Mathematik) der Justus-Liebig-Universität Gießen. Gießen, 2003.
- Schmidt, Wolfgang: *Credit Default Swaps: Analyse und Bewertung*, in: Deutsche Bank, Global Markets Research & Analytics, März 2001.
- Schönbucher, Philipp J.: *Credit Derivates Pricing Models: Models, Pricing and Implementation*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2003.
- Schwarz, Christian: *Eine gruppierte elliptische Copula und ihre Anwendung im Kreditrisikomanagement*. Diplomarbeit an der Technische Universität München - Zentrum Mathematik. München, 2005.
- Shimko, David: *Credit Risk: Models and Management*. London: Risk Books, a Division of Incisive Financial Publishing Ltd., 2004.
- Summer, Christopher: *Credit Risk – Advanced Models*, Skriptum des Fachbereichs Bankbetriebslehre der Wirtschaftsuniversität Wien. Wien, 2007.
- Thabe, Tim: *Bewertung von Kreditrisiko, Zahlungsunfähigkeit, optimale Kapitalstruktur und Agencykosten bei unvollständiger Information*. Inauguraldissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Wirtschaftswissenschaften der Universität Mannheim. Mannheim: 2006.
- Vasicek, Oldrich: *Probability of loss on loan portfolio*, in: Working paper, KMV Corporation, 1987.
- Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der Johann-Wolfgang Goethe-Universität: *Black-Scholes Modell*, <http://www.wiwi.uni-frankfurt.de/~doerner/kap3.pdf> [Zugriff am 27.04.2008]

FRANKFURT SCHOOL / HFB – WORKING PAPER SERIES

No.	Author/Title	Year
126.	Cremers, Heinz / Walzner, Jens Modellierung des Kreditrisikos im Einwertpapierfall	2009
125.	Heidorn, Thomas / Schmaltz, Christian Interne Transferpreise für Liquidität	2009
124.	Bannier, Christina E. / Hirsch, Christian The economic function of credit rating agencies - What does the watchlist tell us?	2009
123.	Herrmann-Pillath, Carsten A Neurolinguistic Approach to Performativity in Economics	2009
122.	Winkler, Adalbert / Vogel, Ursula Finanzierungsstrukturen und makroökonomische Stabilität in den Ländern Südosteuropas, der Türkei und in den GUS-Staaten	2009
121.	Heidorn, Thomas / Rupprecht, Stephan Einführung in das Kapitalstrukturmanagement bei Banken	2009
120.	Roszbach, Peter Die Rolle des Internets als Informationsbeschaffungsmedium in Banken	2009
119.	Herrmann-Pillath, Carsten Diversity Management und diversitätsbasiertes Controlling: Von der „Diversity Scorecard“ zur „Open Balanced Scorecard“	2009
118.	Hölscher, Luise / Clasen, Sven Erfolgsfaktoren von Private Equity Fonds	2009
117.	Bannier, Christina E. Is there a hold-up benefit in heterogeneous multiple bank financing?	2009
116.	Roßbach, Peter / Gießamer, Dirk Ein eLearning-System zur Unterstützung der Wissensvermittlung von Web-Entwicklern in Sicherheitsthemen	2009
115.	Herrmann-Pillath, Carsten Kulturelle Hybridisierung und Wirtschaftstransformation in China	2009
114.	Schalast, Christoph: Staatsfonds – „neue“ Akteure an den Finanzmärkten?	2009
113.	Schalast, Christoph / Alram, Johannes Konstruktion einer Anleihe mit hypothekarischer Besicherung	2009
112.	Schalast, Christoph / Bolder, Markus / Radünz, Claus / Siepmann, Stephanie / Weber, Thorsten Transaktionen und Servicing in der Finanzkrise: Berichte und Referate des Frankfurt School NPL Forums 2008	2009
111.	Werner, Karl / Moormann, Jürgen Efficiency and Profitability of European Banks – How Important Is Operational Efficiency?	2009
110.	Herrmann-Pillath, Carsten Moralische Gefühle als Grundlage einer wohlstandschaffenden Wettbewerbsordnung: Ein neuer Ansatz zur erforschung von Sozialkapital und seine Anwendung auf China	2009
109.	Heidorn, Thomas / Kaiser, Dieter G. / Roder, Christoph Empirische Analyse der Drawdowns von Dach-Hedgefonds	2009
108.	Herrmann-Pillath, Carsten Neuroeconomics, Naturalism and Language	2008
107.	Schalast, Christoph / Benita, Barten Private Equity und Familienunternehmen – eine Untersuchung unter besonderer Berücksichtigung deutscher Maschinen- und Anlagenbauunternehmen	2008
106.	Bannier, Christina E. / Grote, Michael H. Equity Gap? – Which Equity Gap? On the Financing Structure of Germany’s Mittelstand	2008
105.	Herrmann-Pillath, Carsten The Naturalistic Turn in Economics: Implications for the Theory of Finance	2008
104.	Schalast, Christoph (Hrgs.) / Schanz, Kay-Michael / Scholl, Wolfgang Aktionärsschutz in der AG falsch verstanden? Die Leica-Entscheidung des LG Frankfurt am Main	2008
103.	Bannier, Christina E./ Müsch, Stefan Die Auswirkungen der Subprime-Krise auf den deutschen LBO-Markt für Small- und MidCaps	2008

102.	Cremers, Heinz / Vetter, Michael Das IRB-Modell des Kreditrisikos im Vergleich zum Modell einer logarithmisch normalverteilten Verlustfunktion	2008
101.	Heidorn, Thomas / Pleißner, Mathias Determinanten Europäischer CMBS Spreads. Ein empirisches Modell zur Bestimmung der Risikoaufschläge von Commercial Mortgage-Backed Securities (CMBS)	2008
100.	Schalast, Christoph (Hrsg.) / Schanz, Kay-Michael Schaeffler KG/Continental AG im Lichte der CSX Corp.-Entscheidung des US District Court for the Southern District of New York	2008
99.	Hölscher, Luise / Haug, Michael / Schweinberger, Andreas Analyse von Steueramnestiedaten	2008
98.	Heimer, Thomas / Arend, Sebastian The Genesis of the Black-Scholes Option Pricing Formula	2008
97.	Heimer, Thomas / Hölscher, Luise / Werner, Matthias Ralf Access to Finance and Venture Capital for Industrial SMEs	2008
96.	Böttger, Marc / Guthoff, Anja / Heidorn, Thomas Loss Given Default Modelle zur Schätzung von Recovery Rates	2008
95.	Almer, Thomas / Heidorn, Thomas / Schmaltz, Christian The Dynamics of Short- and Long-Term CDS-spreads of Banks	2008
94.	Barthel, Erich / Wollersheim, Jutta Kulturunterschiede bei Mergers & Acquisitions: Entwicklung eines Konzeptes zur Durchführung einer Cultural Due Diligence	2008
93.	Heidorn, Thomas / Kunze, Wolfgang / Schmaltz, Christian Liquiditätsmodellierung von Kreditzusagen (Term Facilities and Revolver)	2008
92.	Burger, Andreas Produktivität und Effizienz in Banken – Terminologie, Methoden und Status quo	2008
91.	Löchel, Horst / Pecher, Florian The Strategic Value of Investments in Chinese Banks by Foreign Financial Institutions	2008
90.	Schalast, Christoph / Morgenschweis, Bernd / Sprengel, Hans Otto / Ockens, Klaas / Stachuletz, Rainer / Safran, Robert Der deutsche NPL Markt 2007: Aktuelle Entwicklungen, Verkauf und Bewertung – Berichte und Referate des NPL Forums 2007	2008
89.	Schalast, Christoph / Stralkowski, Ingo 10 Jahre deutsche Buyouts	2008
88.	Banner, Christina E./ Hirsch, Christian The Economics of Rating Watchlists: Evidence from Rating Changes	2007
87.	Demidova-Menzel, Nadeshda / Heidorn, Thomas Gold in the Investment Portfolio	2007
86.	Hölscher, Luise / Rosenthal, Johannes Leistungsmessung der Internen Revision	2007
85.	Banner, Christina / Hänsel, Dennis Determinants of banks' engagement in loan securitization	2007
84.	Banner, Christina "Smoothing" versus "Timeliness" - Wann sind stabile Ratings optimal und welche Anforderungen sind an optimale Berichtsregeln zu stellen?	2007
83.	Banner, Christina E. Heterogeneous Multiple Bank Financing: Does it Reduce Inefficient Credit-Renegotiation Incidences?	2007
82.	Cremers, Heinz / Löhr, Andreas Deskription und Bewertung strukturierter Produkte unter besonderer Berücksichtigung verschiedener Marktszenarien	2007
81.	Demidova-Menzel, Nadeshda / Heidorn, Thomas Commodities in Asset Management	2007
80.	Cremers, Heinz / Walzner, Jens Risikosteuerung mit Kreditderivaten unter besonderer Berücksichtigung von Credit Default Swaps	2007
79.	Cremers, Heinz / Traugber, Patrick Handlungsalternativen einer Genossenschaftsbank im Investmentprozess unter Berücksichtigung der Risikotragfähigkeit	2007
78.	Gerdesmeier, Dieter / Roffia, Barbara Monetary Analysis: A VAR Perspective	2007

77.	Heidorn, Thomas / Kaiser, Dieter G. / Muschiol, Andrea Portfoliooptimierung mit Hedgefonds unter Berücksichtigung höherer Momente der Verteilung	2007
76.	Jobe, Clemens J. / Ockens, Klaas / Safran, Robert / Schalast, Christoph Work-Out und Servicing von notleidenden Krediten – Berichte und Referate des HfB-NPL Servicing Forums 2006	2006
75.	Abrar, Kamyar / Schalast, Christoph Fusionskontrolle in dynamischen Netzsektoren am Beispiel des Breitbandkabelsektors	2006
74.	Schalast, Christoph / Schanz, Kay-Michael Wertpapierprospekte: Markteinführungspublizität nach EU-Prospektverordnung und Wertpapierprospektgesetz 2005	2006
73.	Dickler, Robert A. / Schalast, Christoph Distressed Debt in Germany: What's Next? Possible Innovative Exit Strategies	2006
72.	Belke, Ansgar / Polleit, Thorsten How the ECB and the US Fed set interest rates	2006
71.	Heidorn, Thomas / Hoppe, Christian / Kaiser, Dieter G. Heterogenität von Hedgefondsindizes	2006
70.	Baumann, Stefan / Löchel, Horst The Endogeneity Approach of the Theory of Optimum Currency Areas - What does it mean for ASEAN + 3?	2006
69.	Heidorn, Thomas / Trautmann, Alexandra Niederschlagsderivate	2005
68.	Heidorn, Thomas / Hoppe, Christian / Kaiser, Dieter G. Möglichkeiten der Strukturierung von Hedgefondsportfolios	2005
67.	Belke, Ansgar / Polleit, Thorsten (How) Do Stock Market Returns React to Monetary Policy ? An ARDL Cointegration Analysis for Germany	2005
66.	Daynes, Christian / Schalast, Christoph Aktuelle Rechtsfragen des Bank- und Kapitalmarktrechts II: Distressed Debt - Investing in Deutschland	2005
65.	Gerdesmeier, Dieter / Polleit, Thorsten Measures of excess liquidity	2005
64.	Becker, Gernot M. / Harding, Perham / Hölscher, Luise Financing the Embedded Value of Life Insurance Portfolios	2005
63.	Schalast, Christoph Modernisierung der Wasserwirtschaft im Spannungsfeld von Umweltschutz und Wettbewerb – Braucht Deutschland eine Rechtsgrundlage für die Vergabe von Wasserversorgungskonzessionen? –	2005
62.	Bayer, Marcus / Cremers, Heinz / Kluß, Norbert Wertsicherungsstrategien für das Asset Management	2005
61.	Löchel, Horst / Polleit, Thorsten A case for money in the ECB monetary policy strategy	2005
60.	Richard, Jörg / Schalast, Christoph / Schanz, Kay-Michael Unternehmen im Prime Standard - „Staying Public“ oder „Going Private“? - Nutzenanalyse der Börsennotiz -	2004
59.	Heun, Michael / Schlink, Torsten Early Warning Systems of Financial Crises - Implementation of a currency crisis model for Uganda	2004
58.	Heimer, Thomas / Köhler, Thomas Auswirkungen des Basel II Akkords auf österreichische KMU	2004
57.	Heidorn, Thomas / Meyer, Bernd / Pietrowiak, Alexander Performanceeffekte nach Directors Dealings in Deutschland, Italien und den Niederlanden	2004
56.	Gerdesmeier, Dieter / Roffia, Barbara The Relevance of real-time data in estimating reaction functions for the euro area	2004
55.	Barthel, Erich / Gierig, Rauno / Kühn, Ilmhart-Wolfram Unterschiedliche Ansätze zur Messung des Humankapitals	2004
54.	Anders, Dietmar / Binder, Andreas / Hesdahl, Ralf / Schalast, Christoph / Thöne, Thomas Aktuelle Rechtsfragen des Bank- und Kapitalmarktrechts I : Non-Performing-Loans / Faule Kredite - Handel, Work-Out, Outsourcing und Securitisation	2004
53.	Polleit, Thorsten The Slowdown in German Bank Lending – Revisited	2004
52.	Heidorn, Thomas / Siragusano, Tindaro Die Anwendbarkeit der Behavioral Finance im Devisenmarkt	2004
51.	Schütze, Daniel / Schalast, Christoph (Hrsg.) Wider die Verschleuderung von Unternehmen durch Pfandversteigerung	2004

50.	Gerhold, Mirko / Heidorn, Thomas Investitionen und Emissionen von Convertible Bonds (Wandelanleihen)	2004
49.	Chevalier, Pierre / Heidorn, Thomas / Krieger, Christian Temperaturderivate zur strategischen Absicherung von Beschaffungs- und Absatzrisiken	2003
48.	Becker, Gernot M. / Seeger, Norbert Internationale Cash Flow-Rechnungen aus Eigner- und Gläubigersicht	2003
47.	Boenkost, Wolfram / Schmidt, Wolfgang M. Notes on convexity and quanto adjustments for interest rates and related options	2003
46.	Hess, Dieter Determinants of the relative price impact of unanticipated Information in U.S. macroeconomic releases	2003
45.	Cremers, Heinz / Kluß, Norbert / König, Markus Incentive Fees. Erfolgsabhängige Vergütungsmodelle deutscher Publikumsfonds	2003
44.	Heidorn, Thomas / König, Lars Investitionen in Collateralized Debt Obligations	2003
43.	Kahlert, Holger / Seeger, Norbert Bilanzierung von Unternehmenszusammenschlüssen nach US-GAAP	2003
42.	Beiträge von Studierenden des Studiengangs BBA 012 unter Begleitung von Prof. Dr. Norbert Seeger Rechnungslegung im Umbruch - HGB-Bilanzierung im Wettbewerb mit den internationalen Standards nach IAS und US-GAAP	2003
41.	Overbeck, Ludger / Schmidt, Wolfgang Modeling Default Dependence with Threshold Models	2003
40.	Balthasar, Daniel / Cremers, Heinz / Schmidt, Michael Portfoliooptimierung mit Hedge Fonds unter besonderer Berücksichtigung der Risikokomponente	2002
39.	Heidorn, Thomas / Kantwill, Jens Eine empirische Analyse der Spreadunterschiede von Festsatzanleihen zu Floatern im Euroraum und deren Zusammenhang zum Preis eines Credit Default Swaps	2002
38.	Böttcher, Henner / Seeger, Norbert Bilanzierung von Finanzderivaten nach HGB, EstG, IAS und US-GAAP	2003
37.	Moormann, Jürgen Terminologie und Glossar der Bankinformatik	2002
36.	Heidorn, Thomas Bewertung von Kreditprodukten und Credit Default Swaps	2001
35.	Heidorn, Thomas / Weier, Sven Einführung in die fundamentale Aktienanalyse	2001
34.	Seeger, Norbert International Accounting Standards (IAS)	2001
33.	Moormann, Jürgen / Stehling, Frank Strategic Positioning of E-Commerce Business Models in the Portfolio of Corporate Banking	2001
32.	Sokolovsky, Zbynek / Strohhecker, Jürgen Fit für den Euro, Simulationsbasierte Euro-Maßnahmenplanung für Dresdner-Bank-Geschäftsstellen	2001
31.	Roßbach, Peter Behavioral Finance - Eine Alternative zur vorherrschenden Kapitalmarkttheorie?	2001
30.	Heidorn, Thomas / Jaster, Oliver / Willeitner, Ulrich Event Risk Covenants	2001
29.	Biswas, Rita / Löchel, Horst Recent Trends in U.S. and German Banking: Convergence or Divergence?	2001
28.	Eberle, Günter Georg / Löchel, Horst Die Auswirkungen des Übergangs zum Kapitaldeckungsverfahren in der Rentenversicherung auf die Kapitalmärkte	2001
27.	Heidorn, Thomas / Klein, Hans-Dieter / Siebrecht, Frank Economic Value Added zur Prognose der Performance europäischer Aktien	2000
26.	Cremers, Heinz Konvergenz der binomialen Optionspreismodelle gegen das Modell von Black/Scholes/Merton	2000
25.	Löchel, Horst Die ökonomischen Dimensionen der ‚New Economy‘	2000
24.	Frank, Axel / Moormann, Jürgen Grenzen des Outsourcing: Eine Exploration am Beispiel von Direktbanken	2000

23.	Heidorn, Thomas / Schmidt, Peter / Seiler, Stefan Neue Möglichkeiten durch die Namensaktie	2000
22.	Böger, Andreas / Heidorn, Thomas / Graf Waldstein, Philipp Hybrides Kernkapital für Kreditinstitute	2000
21.	Heidorn, Thomas Entscheidungsorientierte Mindestmargenkalkulation	2000
20.	Wolf, Birgit Die Eigenmittelkonzeption des § 10 KWG	2000
19.	Cremers, Heinz / Robé, Sophie / Thiele, Dirk Beta als Risikomaß - Eine Untersuchung am europäischen Aktienmarkt	2000
18.	Cremers, Heinz Optionspreisbestimmung	1999
17.	Cremers, Heinz Value at Risk-Konzepte für Marktrisiken	1999
16.	Chevalier, Pierre / Heidorn, Thomas / Rütze, Merle Gründung einer deutschen Strombörse für Elektrizitätsderivate	1999
15.	Deister, Daniel / Ehrlicher, Sven / Heidorn, Thomas CatBonds	1999
14.	Jochum, Eduard Hoshin Kanri / Management by Policy (MBP)	1999
13.	Heidorn, Thomas Kreditderivate	1999
12.	Heidorn, Thomas Kreditrisiko (CreditMetrics)	1999
11.	Moormann, Jürgen Terminologie und Glossar der Bankinformatik	1999
10.	Löchel, Horst The EMU and the Theory of Optimum Currency Areas	1998
09.	Löchel, Horst Die Geldpolitik im Währungsraum des Euro	1998
08.	Heidorn, Thomas / Hund, Jürgen Die Umstellung auf die Stückaktie für deutsche Aktiengesellschaften	1998
07.	Moormann, Jürgen Stand und Perspektiven der Informationsverarbeitung in Banken	1998
06.	Heidorn, Thomas / Schmidt, Wolfgang LIBOR in Arrears	1998
05.	Jahresbericht 1997	1998
04.	Ecker, Thomas / Moormann, Jürgen Die Bank als Betreiberin einer elektronischen Shopping-Mall	1997
03.	Jahresbericht 1996	1997
02.	Cremers, Heinz / Schwarz, Willi Interpolation of Discount Factors	1996
01.	Moormann, Jürgen Lean Reporting und Führungsinformationssysteme bei deutschen Finanzdienstleistern	1995

FRANKFURT SCHOOL / HFB – WORKING PAPER SERIES
CENTRE FOR PRACTICAL QUANTITATIVE FINANCE

No.	Author/Title	Year
19.	Reiswich, Dimitri / Tompkins, Robert Potential PCA Interpretation Problems for Volatility Smile Dynamics	2009
18.	Keller-Ressel, Martin / Kilin, Fiodar Forward-Start Options in the Barndorff-Nielsen-Shephard Model	2008

17.	Griebsch, Susanne / Wystup, Uwe On the Valuation of Fader and Discrete Barrier Options in Heston's Stochastic Volatility Model	2008
16.	Veiga, Carlos / Wystup, Uwe Closed Formula for Options with Discrete Dividends and its Derivatives	2008
15.	Packham, Natalie / Schmidt, Wolfgang Latin hypercube sampling with dependence and applications in finance	2008
14.	Hakala, Jürgen / Wystup, Uwe FX Basket Options	2008
13.	Weber, Andreas / Wystup, Uwe Vergleich von Anlagestrategien bei Riesterrenten ohne Berücksichtigung von Gebühren. Eine Simulationsstudie zur Verteilung der Renditen	2008
12.	Weber, Andreas / Wystup, Uwe Riesterrente im Vergleich. Eine Simulationsstudie zur Verteilung der Renditen	2008
11.	Wystup, Uwe Vanna-Volga Pricing	2008
10.	Wystup, Uwe Foreign Exchange Quanto Options	2008
09.	Wystup, Uwe Foreign Exchange Symmetries	2008
08.	Becker, Christoph / Wystup, Uwe Was kostet eine Garantie? Ein statistischer Vergleich der Rendite von langfristigen Anlagen	2008
07.	Schmidt, Wolfgang Default Swaps and Hedging Credit Baskets	2007
06.	Kilin, Fiodor Accelerating the Calibration of Stochastic Volatility Models	2007
05.	Griebsch, Susanne/ Kühn, Christoph / Wystup, Uwe Instalment Options: A Closed-Form Solution and the Limiting Case	2007
04.	Boenkost, Wolfram / Schmidt, Wolfgang M. Interest Rate Convexity and the Volatility Smile	2006
03.	Becker, Christoph/ Wystup, Uwe On the Cost of Delayed Currency Fixing	2005
02.	Boenkost, Wolfram / Schmidt, Wolfgang M. Cross currency swap valuation	2004
01.	Wallner, Christian / Wystup, Uwe Efficient Computation of Option Price Sensitivities for Options of American Style	2004

HFB – SONDERARBEITSBERICHTE DER HFB - BUSINESS SCHOOL OF FINANCE & MANAGEMENT

No.	Author/Title	Year
01.	Nicole Kahmer / Jürgen Moormann Studie zur Ausrichtung von Banken an Kundenprozessen am Beispiel des Internet (Preis: € 120,-)	2003

Printed edition: € 25.00 + € 2.50 shipping

Download:

Working Paper: http://www.frankfurt-school.de/content/de/research/Publications/list_of_publication0.html

CPQF: http://www.frankfurt-school.de/content/de/research/quantitative_Finance/research_publications.html

Order address / contact

Frankfurt School of Finance & Management

Sonnemannstr. 9–11 ■ D–60314 Frankfurt/M. ■ Germany

Phone: +49(0)69 154 008–734 ■ Fax: +49(0)69 154 008–728

eMail: m.biemer@frankfurt-school.de

Further information about Frankfurt School of Finance & Management

may be obtained at: <http://www.frankfurt-school.de>