

Gottinger, Hans-Werner

**Article**

## Konsumrationierung und Pareto-Optimalität mit Anwendung auf das sowjetische System

Schmollers Jahrbuch für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften

**Provided in Cooperation with:**

Duncker & Humblot, Berlin

*Suggested Citation:* Gottinger, Hans-Werner (1971) : Konsumrationierung und Pareto-Optimalität mit Anwendung auf das sowjetische System, Schmollers Jahrbuch für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, ISSN 0036-6234, Duncker & Humblot, Berlin, Vol. 91, Iss. 5, pp. 513-540, <https://doi.org/10.3790/schm.91.5.513>

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/291254>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*



<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

# Konsumrationierung und Pareto-Optimalität mit Anwendung auf das sowjetische System\*

Von Hans-Werner Gottinger, Berkeley

## I. Einführung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einigen theoretischen Aspekten der Konsumrationierung in ihrem Verhältnis zur Pareto-Optimalität eines Wirtschaftssystems<sup>1</sup>. Als Anwendungsfall dieser Überlegungen wird die sowjetische Konsumrationierung während der dreißiger und vierziger Jahre diskutiert.

Man führte die Rationierung in die traditionelle Konsumtheorie ein, indem man die Einkommensbeschränkung durch mehrere Budgetbeschränkungen ersetzte. In zahlreichen Arbeiten wurde zunächst der Einfluß der Rationierung auf das Konsumentenverhalten untersucht und dann ihre Bedeutung für die gesamtwirtschaftliche Wohlfahrt abgeleitet. Viele Arbeiten sind während des Zweiten Weltkrieges geschrieben worden, als sich Ökonomen mit den Konsequenzen der Rationierung auf die Kriegswirtschaft befaßten. In der zweiten Hälfte der fünfziger Jahre und in den sechziger Jahren ist das wissenschaftliche Interesse an einer Theorie der Rationierung merklich geschwunden. Heute nimmt diese Theorie — wie der Überblick von *Houthakker*<sup>2</sup> zeigt,

---

\* Ich danke Professor Abram *Bergson* (Harvard) und Professor Gregory *Grossman* (U. C. Berkeley) sehr für eine kritische Durchsicht des Manuskripts. Ebenso danke ich dem Herausgeber, Herrn Professor Alfred *Kruse*, für einige technische Verbesserungen und Herrn Fritz *Herzberg* für die Anfertigung der Zeichnungen.

<sup>1</sup> Genau genommen handelt es sich hier nur um ein Pareto-Optimum in dem engeren Sinn eines Tauschoptimums von Konsumgütern, wobei der Produktionsaspekt ausgeklammert ist. *Malinvaud* spricht in diesem Zusammenhang von „optimum de distribution“ im Vergleich zu einem „optimum de production“. Beide Teiloptima führen bei ihm zu einem „état de rendement social maximum“, der ein Pareto-Optimum im weiteren Sinne darstellt. Der Begriff „optimum de distribution“ ist jedoch nicht ganz glücklich gewählt. *Koopmans* hat kritisch festgestellt, daß ein Pareto-Optimum durchaus mit einer sozial unerwünschten Einkommensverteilung vereinbar ist und daß der inhaltliche Kern eines Pareto-Optimums besser mit dem Begriff „Allokationseffizienz“ umschrieben werden sollte. Dennoch hält auch *Koopmans* aus Gründen der Tradition an dem Begriff „Pareto-Optimum“ fest.

<sup>2</sup> Hendrik S. *Houthakker*: The Present State of Consumption Theory (A Survey Article). *Econometrica*, Vol. 29 (1961), S. 704 - 740.

nur eine bescheidene Rolle innerhalb der Konsumtheorie ein. Besonders fehlt eine systematische Behandlung der Rationierung für sozialistische Volkswirtschaften verschiedenen Typs, wo ein deutlicher Zusammenhang zwischen Konsumrationierung und Faktorallokation besteht.

Die Rationierungsbeschränkung ist als eine verbindliche Konsumnorm anzusehen. Mathematisch ist sie gewöhnlich als Ungleichung und nicht als Gleichung gefaßt: Ein Individuum braucht seine Rationierungsquote nicht auszuschöpfen, aber es darf auch nicht mehr als die rationierte Menge verbrauchen. Die Rationierungsbeschränkung ist immer dann eine Gleichung, wenn die Rationierungsquote von der Rationierungsbehörde so niedrig angesetzt wird, daß nicht mehr als der Grundbedarf gedeckt werden kann und soll (totale Rationierung). Falls die Rationierung wirklich effektiv im Sinne einer von der Rationierungsbehörde erstrebten totalen Rationierung sein soll, muß die gesamte rationierte Menge nachgefragt werden. Um dieses Ziel der totalen Rationierung zu erreichen, erfolgt oft neben der bloßen Güterrationierung eine rigorose Preiskontrolle der rationierten Waren. In diesem Fall verliert man wirtschaftspolitisch alle Freiheitsgrade, die in einem rationierten System über einen freien Markt für rationierte Güter gewonnen werden können. Auf diesem freien Markt existieren nur „Ware gegen Geld“- oder „Ware gegen Ware“-Beziehungen. Wenn es in einem rationierten System keine Freiheitsgrade gibt, so kann das entsprechende Problem der individuellen Konsumwahl im Rahmen der traditionellen Konsumtheorie behandelt werden. Hierbei handelt es sich um die Maximierung einer zweifach-differenzierbaren, konkaven (ordinalen) Nutzenfunktion bezüglich mehrerer (linearer) Nebenbedingungen (Budgetbeschränkungen) in Form von Gleichungen, wofür die klassische Lagrangesche Multiplikatormethode die notwendigen Bedingungen für die Existenz eines Optimums liefert. Wir werden später zeigen, daß die Anwendung der nichtlinearen Optimierung eine Verallgemeinerung dieser Problemstellung bietet.

Samuelson<sup>3</sup> argumentiert, daß die Rationierungsbehörde unter  $m$  Waren  $r < m$ , maximal  $m - 1$  Waren rationieren kann, da bei festen Preisen die  $m$ -te Ware durch die individuelle Einkommensbeschränkung festgelegt und damit der normativen Kontrolle der Rationierungsbehörde entzogen wird. Wenn man die Einkommensbeschränkung als Ungleichung betrachtet — und dies läßt sich allgemein rechtfertigen —, so scheint daraus zu folgen, daß die Rationierungsbehörde alle  $m$  Waren rationieren kann. Der Freiheitsgrad des Konsumenten drückt

---

<sup>3</sup> Paul A. Samuelson: *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge (Mass.) 1947. S. 163 - 171.



sich dann in seiner Liquidität oder in seinen Ersparnissen aus — eine Erscheinung, die man in rationierten Systemen häufig empirisch nachweisen kann.

Das Argument von *Samuelson* bleibt dennoch grundsätzlich bestehen, da — wenn man Geld als eine besondere Form der Ware im Sinne eines Anspruchs auf einen zeitlich nicht befristeten Warenvorrat auffaßt — die  $m + 1$ -te Ware ( $\equiv$  Geld) nicht rationiert werden kann.

Gewöhnlich werden in der Literatur wohlfahrtsökonomische Aspekte der Konsumrationierung in Verbindung mit dem Problem einer Pareto-optimalen Versorgung der Konsumenten unter der Voraussetzung behandelt, daß ein Einheitsmarkt für rationierte Waren besteht. *Samuelson*<sup>4</sup> und ähnlich *Tobin*<sup>5</sup> und *McManus*<sup>6</sup> gelangen zu dieser Einheitsmarktstruktur, indem sie einen gegenseitigen Tausch von Zuteilungscoupons und einen von Zuteilungscoupons gegen Geld annehmen. Wenn jedoch die persönliche Übertragbarkeit einer aus mehreren Zuteilungscoupons bestehenden Zuteilungskarte gesetzlich verhindert wird, so wird sich zwangsweise ein Versorgungssystem auf der Grundlage zweier Märkte entwickeln. Aus dem Einheitsmarkt entsteht unter dieser Voraussetzung ein gespaltener Markt. Auf dem rationierten Markt werden nun Coupons und Geld gegen Waren getauscht. Auf dem freien, nichtrationierten Markt oder — wenn dieser gesetzlich nicht geduldet wird — auf dem schwarzen Markt werden nur noch Waren gegen Geld, Gold, Devisen oder irgendwelche Ersatzwährungen (z. B. in Form einer von allen Marktbeteiligten anerkannten „Warenwährung“) getauscht.

Auf dem Einheitsmarkt existiert für eine bestimmte Ware ein für alle Konsumenten einheitlicher Preis. *Samuelsons*<sup>7</sup> Analyse impliziert, daß dieser Preis, selbst in dem Fall, wo der Markt „geräumt“ wird, nicht zu einer Pareto-optimalen Versorgung der Konsumenten führen muß. Demgegenüber werden in dieser Arbeit einige Bedingungen angegeben, unter denen ein in einem gespaltenen Markt vorherrschendes Preissystem zu einer Pareto-optimalen Versorgung führen kann. Es kann gezeigt werden, daß die Begründung eines freien Marktes für den Austausch rationierter Waren eine Pareto-optimale Versorgung in einem rationierten System ermöglicht<sup>8</sup>. Jeder Konsument kann über

<sup>4</sup> *Samuelson*: a.a.O., S. 163 - 171.

<sup>5</sup> *James Tobin*: A Survey of the Theory of Rationing. *Econometrica*, Vol. 20 (1952), S. 521 - 553.

<sup>6</sup> *Maurice McManus*: Points Rationing and the Consumer. *Metroeconomica*, Vol. 8 (1956), S. 118 - 134.

<sup>7</sup> *Samuelson*: a.a.O., S. 171.

<sup>8</sup> Diese Aussage läßt sich auch durch eine entsprechende Anwendung von *Samuelsons* Le-Chatelier-Prinzip gewinnen (Kap. 3), woraus entnommen werden kann, daß ein Gleichgewicht in einem rationierten System suboptimal ist.

einen freien Markt einen Warenkorb nach eigenen Wünschen zusammenstellen, wozu er auf einem rationierten Markt nicht fähig wäre.

Ein besonderes Problem entsteht bei der Analyse eines rationierten Marktes mit multiplen Preisen. Bei *Ames*<sup>9</sup> werden Gleichgewichtsbedingungen für einen rationierten Markt mit multiplen Preisen angegeben. Doch fehlt eine Analyse der Pareto-Optimalität für solche Märkte. Der Nachweis der Pareto-Optimalität ist hier schwieriger. Es stellt sich heraus, daß ein rationierter Markt mit multiplen Preisen Pareto-optimal sein kann, aber nicht sein muß, selbst dann, wenn alle Konsumenten ihre entsprechende Nutzenfunktion maximieren. Wir werden zeigen, daß auch hier eine Spaltung des Marktes zu einer Pareto-optimalen Lösung führen kann. Eine Rationierungsbehörde, deren Maßnahmen auf eine Pareto-optimale Versorgung abzielen, sollte daraus entnehmen, daß die Existenz eines gespaltenen Marktes für rationierte Waren dafür eine wesentliche Voraussetzung ist.

## II. Nutzenmaximierung bei Konsumrationierung: der allgemeine Fall

Zunächst untersuchen wir den allgemeinen Fall der Nutzenmaximierung, wo  $n$  Konsumenten über  $m$  Waren verfügen und jeder Konsument seinen Nutzenindex maximiert bezüglich seines persönlich verfügbaren Einkommens (Einkommensbeschränkung) und bezüglich der von der Rationierungsbehörde festgelegten Rationierungsquote (Rationierungsbeschränkung). Wir beginnen mit einigen Definitionen.

Es sei  $x_{ij}$  die vom  $i$ -ten Konsumenten nachgefragte Menge der  $j$ -ten Ware und  $x_{ij}^0$  die ursprüngliche Ausstattung des  $i$ -ten Konsumenten mit der  $j$ -ten Ware. Die Überschußnachfrage  $e_{ij}$  des  $i$ -ten Konsumenten nach der  $j$ -ten Ware ist dann

$$(1) \quad e_{ij} = x_{ij} - x_{ij}^0 \quad \text{oder} \quad x_{ij} = e_{ij} + x_{ij}^0 \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m).$$

Alle  $i = 1, \dots, n$  Konsumenten können die  $j$ -te Ware zum gleichen von der Rationierungsbehörde festgesetzten Preis  $p_j$  kaufen. Der monetäre Wert der ursprünglichen Ausstattung des  $i$ -ten Konsumenten sei

$$(2) \quad \mu_i^0 = \sum_{j=1}^m p_j x_{ij}^0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Die Konsumausgaben des  $i$ -ten Konsumenten für alle Waren werden definiert als die Summe der Produkte aller gekauften Warenmengen mit den entsprechenden Preisen. Wenn wir Geld als Ware betrachten,

<sup>9</sup> Edward Ames: *Soviet Economic Processes*. Homewood (Ill.) 1965. Kap. 6.

dann sind die so definierten Konsumausgaben des  $i$ -ten Konsumenten gleich seinem persönlich verfügbaren Einkommen, d. h.

$$(3) \quad \mu_i = \sum_{j=1}^m p_j x_{ij} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Wenn alle Waren einschließlich Geld (als besondere Form von „Ware“) berücksichtigt werden, dann muß der monetäre Wert der ursprünglichen Ausstattung gleich den Konsumausgaben sein

$$\sum_{j=1}^m p_j x_{ij}^0 = \sum_{j=1}^m p_j x_{ij} \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{j=1}^m p_j x_{ij} - \sum_{j=1}^m p_j x_{ij}^0 = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

d. h.

$$(4) \quad \sum_{j=1}^m p_j (x_{ij} - x_{ij}^0) = \sum_{j=1}^m p_j e_{ij} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ferner nehmen wir an, daß jeder der  $i = 1, \dots, n$  Konsumenten eine reelle, stetige und zweifach-differenzierbare Nutzenfunktion besitzt.

Diese Nutzenfunktion hat die Form

$$(5) \quad u_i = u_i(x_{i1}, \dots, x_{im}) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Aus (1) folgt dann

$$(6) \quad u_i = u_i(e_{i1} + x_{i1}^0, \dots, e_{im} + x_{im}^0) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Die von der Rationierungsbehörde festgelegte Rationierungsquote der  $j$ -ten Ware für den  $i$ -ten Konsumenten wird mit  $\bar{x}_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, r$ ;  $r < m$ ) bezeichnet. Die Voraussetzung  $r < m$  erweist sich hinsichtlich der Beschränkung (4) als notwendig, denn andernfalls könnte die Überschußnachfrage in (4) nicht verschwinden.

Die Rationierungsbeschränkung erscheint als Ungleichung

$$(7) \quad x_{ij} - \bar{x}_{ij} \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, r; r < m).$$

Wir wollen Bedingungen finden, unter denen jeder Konsument seine Nutzenfunktion (6) bezüglich der ihm auferlegten Beschränkungen (4) und (7) maximiert. In der traditionellen Konsumtheorie wird ein derartiges Maximierungsproblem, wenn die Regularitätsbedingungen für die zu maximierende Nutzenfunktion gegeben sind und die Beschränkungen in Form von Gleichungen vorliegen, mit der klassischen Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren behandelt.



Wir wenden uns einer allgemeineren Technik zu, die zur Behandlung unserer Problemstellung geeignet erscheint, nämlich der von *Kuhn* und *Tucker* vorgeschlagenen Methode der nichtlinearen Optimierung<sup>10</sup>.

Die Methode von *Kuhn* und *Tucker* läßt sich auf das folgende Problem anwenden: Maximiere (oder minimiere) eine reelle, differenzierbare, konkave (oder konvexe) Funktion  $f(x)$  bezüglich differenzierbarer, konvexer Nebenbedingungen

$$(a) \quad g_j(x) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, m).$$

Die Funktionen  $f$  und  $g_j$  seien definiert auf dem nichtnegativen Orthant des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $R^n$ ,  $x$  ist dann eine  $n$ -dimensionale Variable. Nach einem berühmten Satz von *Kuhn* und *Tucker* ist es nun möglich, jeder Ungleichung (a) eine reelle Zahl (genannt Multiplikator)  $\lambda_j$  zuzuordnen, so daß den folgenden Bedingungen genügt wird:

$$(b) \quad \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m),$$

$$(c) \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

$$(d) \quad \lambda_j g_j(x) = 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

Falls  $\hat{x}$  eine optimale Lösung des Maximierungs- oder Minimierungsproblems ist, dann besagt der *Kuhn-Tucker-Satz* unter einer ziemlich schwachen Regularitätsvoraussetzung, daß ein Vektor  $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m)$  existiert, so daß  $\hat{x}, \hat{\lambda}$  den Bedingungen (a) - (d) genügen. Die von *Kuhn* und *Tucker* getroffene Regularitätsvoraussetzung („constraint qualification“) verlangt in verbaler Ausdrucksweise, daß jede noch so kleine Veränderung des Vektors  $x$  ein positives Vielfaches des Tangentialvektors an einer differenzierbaren Kurve in der Menge der zulässigen Lösungen ist, wobei  $\hat{x}$  als Ausgangspunkt für diese Veränderung genommen wird. Eine einfache hinreichende Bedingung dafür ist<sup>11</sup>, daß mindestens ein nichtnegativer, zulässiger Vektor  $\bar{x}$  mit  $g_j(\bar{x}) < 0$  existiert, d. h. daß die Menge der zulässigen Lösungen mindestens einen inneren Punkt besitzt. (Diese Bedingung ersetzt häufig bei der Darstellung des *Kuhn-Tucker-Satzes* die ursprüngliche Regularitätsvoraussetzung.) Dem soeben beschriebenen Problem ist zugeordnet die Lagrange-Form

$$\Phi(x, \lambda) = f(x) + \sum_j \lambda_j g_j(x) \quad \text{für } x \geq 0, \lambda \geq 0.$$

Ein Sattelpunkt ist definiert als Punkt  $(\hat{x}, \hat{\lambda})$  mit  $\hat{x} \geq 0, \hat{\lambda} \geq 0$ , so daß  $\Phi(x, \lambda) \leq \Phi(\hat{x}, \hat{\lambda}) \leq \Phi(\hat{x}, \lambda)$  für alle  $x \geq 0, \lambda \geq 0$  gilt.

<sup>10</sup> Harold W. *Kuhn* und Albert W. *Tucker*: Nonlinear Programming. In: Jerzy *Neyman* (Hrsg.): Proceedings of Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley und Los Angeles 1951. S. 481 - 492. Wieder abgedr. in: Peter *Newman* (Hrsg.): Readings in Mathematical Economics. Vol. I. Baltimore (Md.) 1968. S. 3 - 14. — Vgl. auch Hirofumi *Uzawa*: The *Kuhn-Tucker-Theorem* in Concave Programming. In: Kenneth J. *Arrow*, Leonid *Hurwicz* und Hirofumi *Uzawa* (Hrsg.): Studies in Linear and Nonlinear Programming. Stanford (Calif.) 1958. Kap. 3, S. 32 - 37. — Wir skizzieren hier diese Methode in der üblichen Bezeichnungsweise, um den unvorbereiteten Leser damit bekannt zu machen. Der mit dieser Methode vertraute Leser kann diesen Teil überschlagen.

<sup>11</sup> *Uzawa*: a.a.O., S. 34. Bei *Uzawa* werden allerdings die Nebenbedingungen als konkav angenommen ( $g_j(x) \geq 0$ ), so daß die von ihm gegebene hinreichende Bedingung entsprechend lautet  $g_j(\bar{x}) > 0$  für  $\bar{x} \geq 0$ .

Die Sattelpunkteigenschaft ergibt sich aus der Gleichung  $\Phi(\hat{x}, \hat{\lambda}) = \text{Min}_{\lambda \geq 0} \text{Max}_{x \geq 0} \Phi(x, \lambda)$   
 $(x, \lambda) = \text{Max}_{x \geq 0} \text{Min}_{\lambda \geq 0} \Phi(x, \lambda)$ .

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann das Optimierungsproblem leicht verändert werden, wenn man (a) durch die Beschränkung (a')  $g_j(x) \leq b_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) ersetzt, wobei  $b_j$  eine feste positive Zahl ist. Dann muß (d) entsprechend durch (d')  $\lambda_j(g_j(x) - b_j) = 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ) ersetzt werden, während (b) und (c) unverändert bleiben.

Die Bedingungen (a) - (d) bzw. (a') - (d') sind notwendig, d.h. jede nichtleere, optimale Lösung genügt den Kuhn-Tucker-Bedingungen. Unter zwei zusätzlichen Voraussetzungen sind die Bedingungen auch hinreichend, d.h. jede nichtleere Lösung, die die Kuhn-Tucker-Bedingungen befriedigt, ist auch optimal.

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen sind nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, wenn gilt

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_k - \hat{x}_k)$$

und

$$g_j(x_1, \dots, x_n) \leq g_j(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x_k - \hat{x}_k) \quad (j = 1, \dots, m)$$

für alle zulässigen  $x_1, \dots, x_n$ .

Das bedeutet: für die Existenz eines Sattelpunktes ist es hinreichend, wenn für alle  $x \geq 0, \lambda \geq 0$  die Zusatzbedingungen

$$(e) \quad \Phi(x, \hat{\lambda}) \leq \Phi(\hat{x}, \hat{\lambda}) + \hat{\Phi}_x(x - \hat{x})'$$

$$(f) \quad \Phi(\hat{x}, \lambda) \geq \Phi(\hat{x}, \hat{\lambda}) + \hat{\Phi}_\lambda(\lambda - \hat{\lambda})'$$

erfüllt sind, wobei

$$\hat{\Phi}_x = (\partial \Phi / \partial x_1, \dots, \partial \Phi / \partial x_n) \Big|_{x_k = \hat{x}_k, \lambda_j = \hat{\lambda}_j}$$

$$\hat{\Phi}_\lambda = (\partial \Phi / \partial \lambda_1, \dots, \partial \Phi / \partial \lambda_m) \Big|_{\lambda_j = \hat{\lambda}_j, x_k = \hat{x}_k}$$

$n$ - bzw.  $m$ -Vektoren der partiellen Ableitungen an den Punkten  $\hat{x}, \hat{\lambda}$  sind; „'“ kennzeichnet die Transposition eines Vektors. In diesem Fall, wenn notwendige und hinreichende Bedingungen gegeben sind, liefert der Kuhn-Tucker-Satz das Maximum Maximorum eines nichtlinearen Programms<sup>12</sup>. Damit die hinreichenden Bedingungen (e) und (f) erfüllt sind, genügt es, im folgenden zu verlangen, daß die Lagrange-Form  $\Phi(x, \hat{\lambda})$  bezüglich  $x$  konkav ist und ein lokales Maximum aufweist und daß  $\Phi(\hat{x}, \lambda)$  bezüglich  $\lambda$  konvex ist und ein lokales Minimum aufweist.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen zur Methode von *Kuhn* und *Tucker* können wir das Nutzenmaximierungsproblem der  $i = 1, \dots, n$  Konsumenten in der folgenden Form bringen:

<sup>12</sup> Robert Dorfman, Paul A. Samuelson und Robert M. Solow: Linear Programming and Economic Analysis. New York 1958. Kap. 8 - 3.



### Maximiere die Lagrange-Form

$$(8) \quad \begin{aligned} \Phi_i(x, \lambda) &= u_i(e_{i1} + x_{i1}^0, \dots, e_{im} + x_{im}^0) - \lambda_{i0} \left( \sum_{j=1}^m p_j e_{ij} \right) - \\ &\quad - \sum_{j=1}^r \lambda_{ij} (x_{ij} - \bar{x}_{ij}), \quad x = (x_1, \dots, x_r, \dots, x_m), \\ \lambda &= (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \quad \text{für jedes beliebige } i. \end{aligned}$$

Die nichtnegativen Lagrangeschen Multiplikatoren  $\lambda_{i0}, \lambda_{i1}, \dots, \lambda_{ir}$  können als zugerechnete Werte oder einfach als Knappheitspreise interpretiert werden. Gerade diese Interpretation weist auf eine interessante Anwendung der nichtlinearen Optimierung auf verschiedene Probleme der Wirtschaftstheorie hin. (Ein Beispiel für die Konsumrationierung wird noch in diesem Abschnitt gegeben.) Um das Maximierungsproblem lösen zu können, ist es notwendig, (8) bezüglich der  $m + r + 1$  Variablen zu differenzieren, d. h. nach allen  $e_{ij}$  und  $\lambda_{i0}, \lambda_{i1}, \dots, \lambda_{ir}$  Ableitungen zu bilden. Dann erhalten wir

$$(9) \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial u_i}{\partial e_{ij}} - \lambda_{i0}(p_j) - \frac{\partial \left[ \sum_{j=1}^r \lambda_{ij} (x_{ij} - \bar{x}_{ij}) \right]}{\partial e_{ij}},$$

( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ ),

$$(10) \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda_{i,0}} = \sum_{j=1}^m p_j e_{ij}, \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$(11) \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda_{ij}} = x_{ij} - \bar{x}_{ij}, \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, r).$$

Da  $\delta e_{ij} / \delta x_{ij} = 1$  ist, können wir (9) umformulieren und schreiben

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_i}{\partial e_{ij}} \cdot \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_{ij}} &= \frac{\partial u_i}{\partial e_{ij}} \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_{ij}} - \lambda_{i0}(p_j) - \\ &\quad - \frac{\partial \left[ \sum_{j=1}^r \lambda_{ij} (x_{ij} - \bar{x}_{ij}) \right]}{\partial e_{ij}} \cdot \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_{ij}}, \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

oder vereinfacht

$$(13) \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_{ij}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{ij}} - \lambda_{i0}(p_j) - \lambda_{ij},$$

( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m; \lambda_{i,r+1} = \dots = \lambda_{i,m} = 0$ ).

Entsprechend erhalten wir die notwendigen Bedingungen für die Existenz einer optimalen Lösung (die hinreichenden Bedingungen werden als erfüllt angenommen):

$$(14) \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_{ij}} - \lambda_{i0}(p_j) - \lambda_{ij} \leq 0, \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m; \lambda_{i, r+1} = \dots = \lambda_{i, m} = 0).$$

Falls

$$(15) \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_{ij}} - \lambda_{i0}(p_j) - \lambda_{ij} < 0, \quad \text{dann ist } x_{ij} = 0.$$

$$(16) \quad \sum_{j=1}^m p_j e_{ij} \leq 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Falls

$$(17) \quad \sum_{j=1}^m p_j e_{ij} < 0, \quad \text{dann ist } \lambda_{i0} = 0.$$

$$(18) \quad x_{ij} - \bar{x}_{ij} \leq 0, \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, r).$$

Falls

$$(19) \quad x_{ij} - \bar{x}_{ij} < 0, \quad \text{dann ist } \lambda_{ij} = 0.$$

Wir werden auf den ökonomischen Gehalt dieser Bedingungen bei der Untersuchung von Spezialfällen in den nächsten Abschnitten zu sprechen kommen.

*Ergänzende Bemerkungen:* Mit Hilfe der Sattelpunkttheorie des Kuhn-Tucker-Satzes lassen sich einige interessante Fragestellungen der Wirtschaftstheorie neu betrachten. Hier kann die Sattelpunkttheorie auf natürliche Weise zur Erklärung von Konfliktsituationen zwischen Rationierungsbehörde und Konsumenten herangezogen und so spieltheoretisch interpretiert werden.

Es gebe zwei Spieler: Die Rationierungsbehörde (Spieler I) verfüge über den Vektor  $\lambda$  als Strategienvariable ( $\lambda$  ist der zugerechnete Wert oder Knappheitspreis), die Konsumenten (Spieler II) verfügen über einen Vektor  $x$  als Strategienvariable ( $x$  ist ein Warenkorb). Dann maximiert Spieler II bezüglich  $x$  die Lagrange-Form  $\Phi(x, \lambda)$ , während Spieler I  $\Phi(x, \lambda)$  bezüglich  $\lambda$  minimiert.

Wenn beide vorsichtige Spieler sind, dann maximiert Spieler II das Infimum von  $\lambda$  der Funktion  $\Phi(x, \lambda)$  bezüglich  $x$ , und Spieler I minimiert das Supremum von  $x$  der Funktion  $\Phi(x, \lambda)$  bezüglich  $\lambda$ .

Der ökonomische Gehalt dieser Überlegungen läßt sich in folgende Form fassen:

1. Wie soll Spieler II seinen Warenkorb zusammenstellen, damit bei einem gegebenen Preis jeder Ware  $p_j$  ein Nutzenindex  $u$  maximiert wird?

2. Welchen Wert sollte Spieler I jeder rationierten Ware zurechnen, damit bei einem nachgefragten Warenkorb der Wert der Warenmenge minimiert wird<sup>13</sup>?

Das Auffinden eines Sattelpunktes kann sich dann iterativ auf folgende Weise abspielen: Spieler II maximiert seinen Nutzen  $u(x)$ , wobei  $x$  einer Beschränkungsmenge  $C$  angehört, so daß  $g_j(x) \leq 0$  für  $x \in C$ . Spieler I entwirft ein System von Konsumsteuern und Transferzahlungen, so daß, falls Spieler II einige Beschränkungen verletzt (z. B.  $g_j(x) > 0$  für einige  $j$ ), eine Konsumsteuer in Höhe des Betrages  $\lambda_j g_j(x)$  auferlegt wird. Wenn umgekehrt Spieler II einige Beschränkungen deutlich unterschreitet (z. B.  $g_j(x) < 0$  für einige  $j$ ), so leistet Spieler I Transferzahlungen an ihn in Höhe des Betrages  $-\lambda_j g_j(x)$  ( $\lambda_j \geq 0$ ). Das Optimierungsproblem für Spieler II besteht also in der Maximierung der Lagrange-Form

$$\Phi(x, \lambda) = u(x) - \sum_j \lambda_j g_j(x), \quad \lambda \geq 0, \quad x \in C$$

bezüglich  $x$  und für Spieler I in der Minimierung von  $\Phi(x, \lambda)$ ,  $x \geq 0$  bezüglich  $\lambda$ .

Ein Ausgleich der unterschiedlichen Interessen zwischen Spieler I und II kann dann in mehreren Schritten des Informationsaustausches erfolgen:

1. Die Rationierungsbehörde (Spieler I) verordnet zu Beginn der Rationierung ein System von Konsumsteuern und Transferzahlungen auf Grund der Bewertungen  $\lambda_1^0 \geq 0, \dots, \lambda_m^0 \geq 0$ .

2. Die Konsumenten (Spieler II) maximieren daraufhin  $\Phi(x, \lambda^0)$  bezüglich  $x$  und  $x \in C$ . Sie übermitteln der Rationierungsbehörde die entsprechende optimale Lösung  $\hat{x}$ .

3. Die Rationierungsbehörde überprüft jede in das Optimierungsproblem eingehende Beschränkung  $g_j(\hat{x})$ , um jede Verletzung der Beschränkung zu bestrafen und jede Unterschreitung zu belohnen.

a) Falls  $g_j(\hat{x}) > 0$ , dann ist die Konsumsteuer nicht hoch genug, und dementsprechend wird  $\lambda_j^0$  durch  $\lambda_j^1$  ersetzt ( $\lambda_j^1 > \lambda_j^0$ ).

<sup>13</sup> Die Motivationen für das Verhalten beider Spieler sind leicht zu finden: Spieler II verfolgt das individualistische Ziel einer bestmöglichen Bedürfnisbefriedigung, Spieler I verfolgt das Ziel der Minimierung des volkswirtschaftlichen Aufwandes bei der Allokation knapper Ressourcen.



b) Falls  $g_j(\hat{x}) < 0$  und  $\lambda_j^0 > 0$  für einige  $j$ , dann reduziert die Rationierungsbehörde die Konsumsteuer um den Betrag  $\lambda_j^1 g_j(\hat{x})$  ( $0 \leq \lambda_j^1 < \lambda_j^0$ ), oder — was hier formal auf das Gleiche hinausläuft — sie leistet Transferzahlungen in Höhe von  $-\lambda_j^1 g_j(\hat{x})$ .

c) Falls  $g_j(\hat{x}) \leq 0$  und  $\lambda_j^0 g_j(\hat{x}) = 0$ , dann ist  $\lambda_j^1 = \lambda_j^0$ .

Wenn nicht für alle  $j$  die letzte Bedingung c) erfüllt ist, so wiederholt sich dieser Dialog in beschriebener Weise, wobei in der nächsten Runde nur  $\lambda^0$  durch  $\lambda^1$  ersetzt wird.

Ein Spezialfall dieses Prozesses, wenn  $\alpha$  eine positive Konstante ist und  $\lambda_j = \text{Max. } \{0, \lambda + \alpha g_j(\hat{x})\}$  gilt, kann mit Hilfe einer der Gradientenmethoden von *Arrow*, *Hurwicz* und *Uzawa*<sup>14</sup> behandelt werden, die die Konvergenz an einen Sattelpunkt beschreiben.

### III. Nutzenmaximierung bei Konsumrationierung: der Spezialfall

Die Argumentation in diesem Abschnitt und in den beiden nächsten Abschnitten stützt sich auf ein rationiertes System, in dem nur zwei Konsumenten handeln und nur zwei oder drei Waren verfügbar sind. Die Beschränkung auf den Zwei-Personen-Zwei-Waren-Fall ist nützlich, um einige grundsätzliche Fragen der Rationierung zu klären.

Die rationierte Ware erhalte den Index  $j = 1$ .

Falls für Konsument I in (14) und (16) (Abschnitt II) das Gleichheitszeichen gilt und (18) als strikte Ungleichung besteht, d. h. wenn die Rationierung im Sinne von *Samuelson* nicht effektiv ist, dann folgt daraus in unserem Spezialfall

$$(1) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_{11}} / \frac{\partial u_1}{\partial x_{12}} = p_1/p_2 .$$

Dies ist das gewöhnliche Ergebnis, wie es in einem System freier Konsumwahl nach Anwendung der Lagrangeschen Multiplikatormethode auf das individuelle Nutzenmaximierungsproblem auftritt.

Falls nun für Konsument II in (14), (16) und (18) das Gleichheitszeichen gilt, dann ist das folgende Ergebnis ableitbar:

$$(2) \quad \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_{21}} - \lambda_{21} \right) / \frac{\partial u_2}{\partial x_{22}} = p_1/p_2 .$$

Da  $\lambda_{21}$  nicht-negativ sein muß, ist der Grenznutzen von  $x_{21}$  größer oder gleich dem Grenznutzen von  $x_{22}$ .  $\lambda_{21}$  ist der Knappheitspreis jeder

<sup>14</sup> *Arrow*, *Hurwicz* und *Uzawa*: a.a.O., Kap. 6, 7, und 8. — Vgl. auch *Samuel Karlin*: *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*. Vol. I. Reading (Mass.) 1959. Kap. 7.3.

zusätzlichen Einheit von  $x_{21}$ , d. h. der Preis, den Konsument II für jede Einheit von  $x_{21}$  bezahlen würde, um die Rationierungsbeschränkung aufzuheben.

Der Leser kann leicht die Lösungen (1) und (2) graphisch darstellen, worauf wir hier verzichten. Im Indifferenzdiagramm erscheint auf der Abszisse die Menge der rationierten Ware  $\bar{x}_{11}$ , auf der Ordinate die Menge der nicht-rationierten Ware  $x_{22}$ .

Im ersten Fall (1) erhalten wir die übliche Tangentlösung der Budget-Preislinie an die Indifferenzkurve, wobei wegen  $\bar{x}_{11} < x_{11}$  die Tangente zur Abszisse hin scharf abbiegt und die Abszisse im Punkt  $\bar{x}_{11}$  schneidet.

Im zweiten Fall (2) haben wir eine typische Ecklösung, die verdeutlicht, daß die klassische marginalistische Technik auf diesen Fall nicht angewendet werden kann.

Fassen wir (1) und (2) zusammen, so ergibt sich

$$(3) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_{11}} / \frac{\partial u_1}{\partial x_{12}} = \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_{21}} - \lambda_{21} \right) / \frac{\partial u_2}{\partial x_{22}}.$$

Aus (3) geht klar hervor, daß — solange  $\lambda_{21}$  positiv ist — die marginalen Substitutionsraten zwischen  $x_{11}$  und  $x_{12}$  für beide Konsumenten nicht gleich sein können.

Auch wenn wir die Analyse auf drei Waren ausdehnen, bleiben die Ergebnisse im wesentlichen unverändert. Nehmen wir dazu an, die am Anfang dieses Abschnitts festgelegten Bedingungen bezüglich der Gleichheits- und Ungleichheitszeichen in (14), (16) und (18) gelten weiterhin. Wenn nun von drei Waren höchstens zwei rationiert werden, läßt sich leicht sehen, daß für Konsument I die folgenden Gleichgewichtsbedingungen bestehen:

$$(4) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_{11}} / \frac{\partial u_1}{\partial x_{12}} = p_1/p_2 ,$$

$$(5) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_{11}} / \frac{\partial u_1}{\partial x_{13}} = p_1/p_3 ,$$

$$(6) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_{12}} / \frac{\partial u_1}{\partial x_{13}} = p_2/p_3 .$$

Fragen wir jetzt danach, welche Situation sich für Konsument II ergibt. Falls zunächst nur die erste Ware ( $j = 1$ ) rationiert wird, so bestehen für Konsument II die Gleichgewichtsbedingungen

$$(7) \quad \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_{21}} - \lambda_{21} \right) / \frac{\partial u_2}{\partial x_{22}} = p_1/p_2 ,$$

$$(8) \quad \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_{21}} - \lambda_{21} \right) / \frac{\partial u_2}{\partial x_{23}} = p_1/p_3 ,$$

$$(9) \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_{22}} / \frac{\partial u_2}{\partial x_{23}} = p_2/p_3 .$$

Falls die ersten beiden Waren ( $j = 1, 2$ ) rationiert werden, dann ergeben sich für Konsument II die etwas veränderten Gleichgewichtsbedingungen:

$$(10) \quad \frac{(\partial u_2 / \partial x_{21}) - \lambda_{21}}{(\partial u_2 / \partial x_{22}) - \lambda_{22}} = \frac{-\lambda_{21}}{-\lambda_{22}} = p_1/p_2 ,$$

$$(11) \quad \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_{21}} - \lambda_{21} \right) / \frac{\partial u_2}{\partial x_{23}} = p_1/p_3 ,$$

$$(12) \quad \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_{22}} - \lambda_{22} \right) / \frac{\partial u_2}{\partial x_{23}} = p_2/p_3 .$$

Von diesen neun Gleichungen (4) - (12) stimmen die ersten drei, nämlich (4), (5) und (6), mit den Ergebnissen der traditionellen Konsumtheorie überein. Die anderen Gleichungen enthalten für die jeweils rationierten Waren im Zähler korrigierte Ausdrücke  $(\partial u_2 / \partial x_{2j}) - \lambda_{2j}$ . Gleichung (10) enthält korrigierte Ausdrücke sowohl im Zähler als auch im Nenner. So besteht für Konsument II der Unterschied zwischen dem Fall, wo nur eine Ware rationiert wird, und dem Fall, wo zwei Waren rationiert werden, grundsätzlich nur in der Ersetzung der aus der traditionellen Konsumtheorie bekannten Gleichgewichtsbedingungen durch die korrigierten Ausdrücke des Grenznutzens  $(\partial u_2 / \partial x_{2j}) - \lambda_{2j}$ . Bei mehr als drei Waren läßt sich der hier gezeigte Weg analytisch weiter verfolgen, wenngleich rechentechnisch einige Schwierigkeiten auftreten können.

Im Fall vieler Waren muß man noch beachten, welche davon rationiert sind. Dementsprechend treten dann verschiedene Gleichgewichtsbedingungen in der Form (10) oder (11) auf.

#### IV. Tausch und Pareto-Optimalität

Nehmen wir an, Konsument II habe einen konstanten Nutzenindex  $u_2^0$ . Falls nun Konsument I seinen Nutzen bezüglich der Beschränkung  $u_2 = u_2^0$  maximieren will, kommt es darauf an, die Lagrange-Form

$$(1) \quad \Phi_1 = u_1(x_{11}, x_{12}) + \lambda [u_2(x_{21}, x_{22}) - u_2^0]$$



zu maximieren. Dabei wird unterstellt, daß jeder der beiden Konsumenten über die beiden Waren ( $j = 1, 2$ ) verfügt. Die gesamte Menge jeder Ware, die auf beide Konsumenten verteilt wird, sei rationiert und wird mit  $x_1^0$  und  $x_2^0$  bezeichnet. Es ist  $x_1^0 = x_{11} + x_{21}$  und  $x_2^0 = x_{12} + x_{22}$ .

Berücksichtigen wir dies, so kann (1) umschrieben werden zu

$$(2) \quad \bar{\Phi}_1 = u_1(x_{11}, x_{12}) + \lambda [u_2(x_1^0 - x_{11}, x_2^0 - x_{12}) - u_2^0].$$

Indem wir die entsprechenden partiellen Ableitungen von (2) gleich Null setzen, gelangen wir zu einer notwendigen Bedingung der Pareto-Optimalität, nämlich

$$(3) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_{11}} / \frac{\partial u_1}{\partial x_{12}} = \frac{\partial u_2}{\partial x_{11}} / \frac{\partial u_2}{\partial x_{12}}.$$

Diese notwendige Bedingung der Pareto-Optimalität entspricht der Aussage, daß die marginale Substitutionsrate nach dem Tauschvorgang für jeden der beiden Konsumenten gleich sein muß<sup>15</sup>.

Wenn jeder der Konsumenten seinen Nutzen maximiert und als notwendige Bedingung dafür Gleichung (3) (Abschnitt III) gilt, dann liefert (3) (Abschnitt 3) kein Pareto-Optimum, sofern nicht  $\lambda_{21} = 0$  ist. Denn in jedem anderen Fall ( $\lambda_{21} \neq 0$ ) wäre es immer noch durch eine Umverteilung von Waren möglich, den Nutzen eines Konsumenten zu erhöhen, ohne gleichzeitig den des anderen zu verringern.

Für den Nachweis der Pareto-Optimalität ist also der Wert von  $\lambda$  entscheidend. Die damit verbundene Problematik bei Konsumrationierung untersuchen wir im nächsten Abschnitt.

## V. Konsumrationierung und Preissystem

Die klassische Wohlfahrtsökonomie lieferte das folgende Ergebnis: Bei freier Verfügbarkeit über Waren („free disposability“) ist eine notwendige Bedingung der Pareto-Optimalität, daß die marginale Sub-

<sup>15</sup> Kenneth J. Arrow: An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics. In: *Neyman* (Hrsg.): *Proceedings*, a.a.O., S. 507 - 532. Wieder abgedr. in: *Newman* (Hrsg.): *Readings*, a.a.O., S. 365 - 390. — Es ist allerdings von Arrow für diesen Fall gezeigt worden, daß die notwendige Bedingung (3) unter folgenden zwei Voraussetzungen nicht mehr allgemein zutrifft:

1. Es gelten die nichtnegativen Beschränkungen  $x_{11} \geq 0$ ,  $x_{12} \geq 0$ ,  $x_1^0 - x_{11} \geq 0$ ,  $x_2^0 - x_{12} \geq 0$ .
2.  $x_{11}$  oder  $x_{12}$  sind nicht als unabhängige Variable, sondern als Funktionen von  $x_{21}$  bzw.  $x_{22}$  definiert.

stitutionsrate zwischen den verfügbaren Waren für alle Konsumenten gleich ist. In unserem speziellen Fall gilt daher Bedingung (3) (Abschnitt IV). Dabei wird — bisweilen stillschweigend — unterstellt, daß die Summe des privaten Nutzens gleich dem gesellschaftlichen Nutzen ist. Es ist so grundsätzlich möglich, Pareto-Optimalität auch bei Rationierung nachzuweisen, falls wir ein gespaltenes Marktsystem einführen, wo sich ein zweiter, nichtrationierter Markt — legal oder illegal — herausbildet<sup>16</sup>. (Eine andere, hier nicht weiter verfolgte Möglichkeit wird in Fußnote 24 angedeutet.)

Wir werden hier *nicht* zeigen, welcher Gleichgewichtspreis sich in dem nichtrationierten Teilmarkt des gespaltenen Marktsystems bilden wird. (Dazu wären Kenntnisse über die Dynamik der Preisbildung notwendig.) Vielmehr kommt es zunächst auf den Nachweis an, daß mindestens ein derartiger Preis (oder Preisvektor) existiert, der zu einer Pareto-optimalen Versorgung der Konsumenten führt. Dieser Zusammenhang zwischen Gleichgewichtspreis und Pareto-Optimum ist in der klassischen Wohlfahrtstheorie nicht befriedigend geklärt worden. Namentlich *Arrow*<sup>17</sup> und *Koopmans*<sup>18</sup> haben mit modernen Methoden gezeigt, daß dem Preissystem eine primäre Rolle bei dem Nachweis der Pareto-Optimalität zukommt.

Die folgenden Überlegungen unterscheiden sich von denjenigen *Tobins*<sup>19</sup> und anderer, wo angenommen wird, daß keine überschüssigen Zuteilungscoupons existieren. Das bedeutet, daß die Rationierungsquote vollständig ausgeschöpft wird. Diese Annahme erscheint plausibel in einem System des Einheitsmarktes, wo sich die Preisbildung nach Angebot und Nachfrage richtet. Denn wenn überschüssige Coupons gehortet werden und zu einem späteren Zeitpunkt als zusätzliche Nachfrage auf den rationierten Einheitsmarkt treffen, würde der Preis bestimmter Waren steigen<sup>20</sup>. Konsumenten mit unterem Einkommen müßten

---

<sup>16</sup> Falls man Unsicherheitselemente für den freien Markt gelten ließe, käme es für jeden Konsumenten darauf an, den Erwartungswert seines Nutzens zu maximieren. Ein interessanter Anwendungsfall läßt sich für den schwarzen Markt geben, wobei als Naturzustände  $s_1$  und  $s_2$  die Möglichkeiten „ungehinderter Tausch“ und „bestrafter Tausch“ ausgewiesen werden. Dann können die den Naturzuständen zugeordneten (subjektiven) Wahrscheinlichkeiten als Gewichte in den Wert des erwarteten Nutzens eingehen. Das Problem eines Pareto-Optimums in dieser Situation müßte dann mit Methoden der modernen (*Bayesschen*) Entscheidungstheorie behandelt werden, etwa in der Weise, wie das neuerdings bei *Raiffa* geschehen ist. Vgl. Howard *Raiffa*: *Decision Analysis: Introductory Lectures on Choices under Uncertainty*. Reading (Mass.) 1968.

<sup>17</sup> *Arrow*: a.a.O.

<sup>18</sup> Tjalling C. *Koopmans*: *Three Essays on the State of Economic Science*. New York 1957. Essay I, Kap. 2. — Vgl. auch *Karlin*: a.a.O., Kap. 9.1 und Edmond *Malinvaud*: *Leçons de théorie microéconomique. Statistique et programmes économiques* 15. Paris 1969.

<sup>19</sup> *Tobin*: a.a.O.

wegen der gestiegenen Preise die Zusammensetzung ihres Warenkorb ändern. Eine verantwortungsvolle Regierung wäre dann aus wohlfahrtsökonomischen Überlegungen gezwungen, entweder rigorose Preiskontrollen einzuführen oder die Rationierungsbestimmungen zu lockern. Die zweite Möglichkeit erscheint in bestimmten wirtschaftlichen Notsituationen (z. B. unter kriegswirtschaftlichen Bedingungen) als widersinnig, die erste widerspricht der freien Preisbildung auf dem rationierten Einheitsmarkt. In einem gespaltenen Marktsystem bei festen Preisen für rationierte Waren äußert sich der inflationistische Druck auf dem freien Markt, dessen Preisniveau gewöhnlich beträchtlich über dem des rationierten Marktes liegt (vgl. den nächsten Abschnitt VI). In der sowjetischen oder in einer ähnlich organisierten Wirtschaft, wo die Preise der rationierten Waren von der Zentrale bestimmt werden und die Versorgung der Konsumenten wie in einem gespaltenen Marktsystem erfolgt, kommt allerdings der Preisbestimmung eine zweitrangige Bedeutung zu.

Bei reinem Wettbewerb wird gewöhnlich unterstellt, daß für jede Ware ein einheitlicher Preis existiert und alle Marktbeteiligten mit dem gleichen Preis rechnen müssen. Eine erste notwendige Bedingung für die Nutzenmaximierung ist, daß die marginale Substitutionsrate zwischen den verschiedenen Waren gleich dem reziproken Verhältnis der entsprechenden Preise ist. Da alle Konsumenten mit den gleichen Preisen rechnen müssen, folgt daraus, daß die marginale Substitutionsrate für alle Konsumenten gleich sein muß. In dem einfachen Zwei-Personen-Zwei-Waren-Fall wird dann jede individuelle Indifferenzkurve von der Budget-Preislinie tangiert. Nehmen wir nun zur Illustration folgendes an: Zwei Konsumenten werden mit zwei Waren nicht Pareto-optimal versorgt, wie z. B. im Punkt K der Abbildungen 1 und 2 (S. 529). Falls beide einen Pareto-optimalen Zustand erreichen wollen, wobei jeder seinen Nutzen an einem gegebenen nichtnegativen, relativen Preisvektor  $p$  ( $p_i \geq 0$ ,  $\sum p_i = 1$ ,  $i = 1, 2$ ) maximiert, dann muß der verfügbare Warenvorrat vollständig verteilt werden, und jede individuelle Indifferenzkurve wird von der Budget-Preislinie im Punkt S der Abbildung 1 tangiert. Kein anderer Punkt auf der Indifferenzkurve genügt dieser Bedingung. Diese Situation liegt bei reinem Wettbewerb vor: Beide Konsumenten maximieren ihren Nutzen an dem Preisvektor  $p'$ . Der Preisvektor  $p'$  ist dann der optimale Preisvektor  $p$ , und dieser Umstand sichert die Identität von Gleichgewichts- und Pareto-optimaler Lösung im Punkt S der Abbildung 1. Eine analytische und geometrische Behandlung dieses Falles findet sich bei *Malinvaud*<sup>21</sup>.

<sup>20</sup> Wir lassen hier außer acht, daß die Geltung der Zuteilungscoupons zeitlich begrenzt ist und diese nicht übertragbar sind.

<sup>21</sup> *Malinvaud*: a.a.O., Kap. IV.



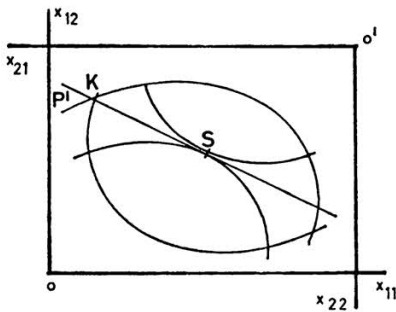


Abb. 1

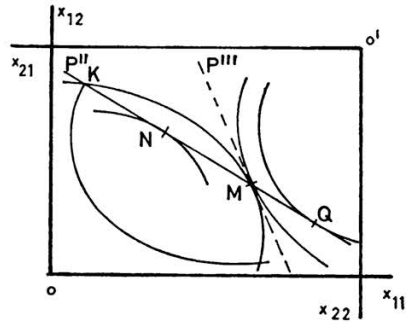


Abb. 2

In Abbildung 2 ist Punkt M ebenso zulässig wie Punkt K, da definitionsgemäß Konsument II zwischen M und K indifferent ist. Der Randpunkt M ist zwar eine Pareto-optimale Lösung, aber keine Gleichgewichtslösung im Sinne des reinen Wettbewerbs, denn er verletzt die Bedingung, daß beide Konsumenten ihren Nutzen an dem gegebenen Preisvektor  $p''$  maximieren. In Abbildung 2 würde Konsument I seinen Nutzen im Punkt Q und Konsument II seinen Nutzen im Punkt N maximieren, aber weder Q noch N sind sowohl Gleichgewichts- als auch Pareto-optimale Lösungen. M wäre dann und nur dann eine Gleichgewichts- und gleichzeitig eine Pareto-optimale Lösung, wenn beide Konsumenten die Warenpreise so beeinflussen könnten, daß sich der Preisvektor  $p'''$  (gestrichelte Linie) einstellt, der die Indifferenzkurven im Punkt M tangiert. Dies widerspricht sowohl einer wesentlichen Annahme der Wettbewerbstheorie, daß keiner der Marktbeteiligten den Preis beeinflussen kann, als auch einer parametrischen Festlegung der Preise seitens der Planungsbehörde.

Wenn zwar eine Pareto-optimale, aber keine Gleichgewichtslösung zustande kommt (wie im Punkt M der Abbildung 2), so kann das darauf zurückzuführen sein, daß nach einer ersten Tauschaktion einer der beiden Konsumenten den anderen zwingt, auf der gleichen Indifferenzkurve wie vor dem Tausch zu bleiben. Dann kann weder der erste noch der zweite Konsument seinen Nutzen an einem gegebenen Preisvektor  $p''$  maximieren, obwohl ein Tausch möglich ist und eine Pareto-optimale Lösung bezüglich des Preisvektors  $p''$  existiert. Man sieht bereits intuitiv ein, daß bei erfolgreicher Machtausübung eines Konsumenten eine daraus resultierende Pareto-optimale Lösung nicht identisch ist mit einer bei reinem Wettbewerb erzielten Pareto-optimalen Lösung. Es kann demnach mehrere Pareto-Optima geben, die keine Gleichgewichtslösungen sind.

Wenn jeder Konsument seinen Nutzen maximiert, hängt es entscheidend von dem gegebenen Preisvektor ab, ob eine Pareto-optimale Lösung mit den Nutzenmaxima aller Konsumenten an dem gegebenen Preisvektor zusammenfällt und so eindeutig bestimmt ist. Der Zusammenhang zwischen der Existenz eines optimalen Preisvektors  $\hat{p}$  und dem Sattelpunktsatz der nichtlinearen Optimierung ist nach den Überlegungen in Abschnitt II offensichtlich<sup>22</sup>. Wenn die in Abschnitt II festgelegten Bedingungen über die Existenz eines Sattelpunktes erfüllt sind, dann folgt aus der Sattelpunkteigenschaft: Ein Pareto-Optimum ist dann eindeutig bestimmt, wenn alle Konsumenten ihren Nutzen bezüglich der angegebenen Beschränkungen maximieren und wenn ein optimaler Preisvektor (Lagrangescher Multiplikator)  $\hat{\lambda}$  existiert, der ein optimales Preissystem konstituiert.

Unter den Annahmen des reinen Wettbewerbs ist der Vektor der Wettbewerbspreise mit dem optimalen Preisvektor  $\hat{\lambda}$  identisch. In einem planökonomischen System<sup>23</sup> muß  $\hat{\lambda}$  von der Planungsbehörde ermittelt werden. Der Sattelpunktsatz liefert so die Grundlage der Erkenntnis, daß ein eindeutig bestimmtes Pareto-Optimum auch in einem planökonomischen System grundsätzlich möglich ist<sup>24</sup>.

Mit Hilfe anderer Techniken aus der Theorie konvexer Mengen hat Arrow<sup>25</sup> folgendes gezeigt: Wenn ein optimaler Preisvektor  $\hat{p}$  (Gleichgewichtspreisvektor) in einem Punkt  $\hat{x}$  existiert, dann ist  $\hat{x}$  ein Pareto-optimaler Punkt, wo alle Konsumenten ihren Nutzen bezüglich ihrer Einkommensbeschränkung maximieren. Arrow weist darauf hin, daß diese Aussage allgemein unter den Bedingungen des reinen Wettbewerbs gilt, aber er hält es auch für möglich, daß ein optimaler Punkt in einem rationierten System erreicht werden kann<sup>26</sup>.

Diese Ergebnisse sind vereinbar mit den hier vorgetragenen Überlegungen.

<sup>22</sup> Vgl. auch Karlin: a.a.O., S. 296, Theorem 9.1.1.

<sup>23</sup> Hans-Werner Gottinger: Die Existenz eines planökonomischen Gleichgewichts. Z. f. d. ges. Staatsw., 124. Jg. (1968), S. 467 - 480.

<sup>24</sup> Es ist dann wahrscheinlich, daß ein optimales Preissystem sich etwa in der iterativen Form entwickelt, wie sie im letzten Teil von Abschnitt II beschrieben worden ist. Das planökonomische System ist hier auf ein System der Konsumrationierung beschränkt, wo die Rationierungsbehörde sowohl die Menge der verfügbaren Waren als auch die Preise kontrolliert. Der Nachweis der Pareto-Optimalität in diesem System könnte unter Hinzufügung einiger behavioristischer Annahmen auf der Linie meiner früheren Arbeit erfolgen. Im nächsten Abschnitt verfolgen wir jedoch einen anderen Weg, der von einem gespaltenen Marktssystem ausgeht. Dieser Weg erscheint uns für die tatsächliche Entwicklung des sowjetischen Wirtschaftssystems angemessener; denn wir müssen von dem bestehenden Preissystem ausgehen, das nicht vergleichbar ist mit einem optimalen Preissystem im Sinne des Sattelpunktsatzes oder eines wettbewerblichen Preissystems.

<sup>25</sup> Arrow: a.a.O., S. 514, Theorem 2; S. 519, Theorem 5.

<sup>26</sup> Vgl. auch Koopmans: a.a.O., Essay I, Kap. 2.4.

## VI. Ein Modell der sowjetischen Konsumrationierung

*Vorbemerkungen:* Die sowjetische Wirtschaftstheorie hat sich bisher mit den wohlfahrtsökonomischen Aspekten der Rationierung in ihrem Wirtschaftssystem nicht befaßt. Das hängt wohl mit ihrer positiven Einstellung gegenüber der „Konsumtionsplanung“ und der Festlegung „wissenschaftlicher Normen“ für den Konsum der Bevölkerung zusammen. Da diese Maßnahmen nur der „Erhöhung des Lebensstandards“ dienen, entsteht — trivialerweise — ein wohlfahrtsökonomisches Problem erst gar nicht. Offiziell gibt es zur Zeit in der Sowjetunion keine Rationierung. Dennoch gibt es aus systemimmanenten Gründen eine versteckte Art der Rationierung für bestimmte Warengruppen<sup>27</sup>, deren Ausmaß sich schwer abschätzen läßt<sup>28</sup>.

Eine andere, rationierungsähnliche Wirkung auf den sowjetischen Märkten, deren Ursache maßgeblich in dem sowjetischen Konsumentenverhalten zu finden ist, sollte ebenfalls nicht übersehen werden. In den Vorkriegsjahren und auch noch in den ersten Nachkriegsjahren war der Bedarf der sowjetischen Bevölkerung so hoch und undifferenzierter, daß sich ständig ein Nachfrageüberhang bildete. Es herrschten typische Verkäufermärkte vor. In den letzten Jahren hat sich demgegenüber die Situation etwas gewandelt. Der Bedarf breiter Volksschichten ist differenzierter geworden. Es wird nicht mehr alles gekauft, was angeboten wird. Als Folge davon und wegen einer kaum veränderten Angebotspolitik entstehen trotz vermehrter Warenangebote auf einigen Teilmärkten Läger unverkäuflicher Waren, während sich auf der Seite der Konsumenten monetäre Überschüsse in Form nicht beabsichtigter Ersparnisse ansammeln. Diese Situation können wir als Quasirationierung bezeichnen. Zwar besteht jetzt nicht mehr eine strikte quantitative Beschränkung des Warenangebots, doch seine qualitative Zusammensetzung hat auf Grund ungenügender Substitutionsmöglichkeiten für den Konsumenten einen rationierungsähnlichen

<sup>27</sup> Vgl. dazu: Abram *Bergson*: *The Economics of Soviet Planning*. New Haven (Conn.) 1964. S. 62. — Philip *Hanson*: *The Consumer in the Soviet Economy*. London 1968. S. 119, 171, 207.

<sup>28</sup> Vgl. L. S. *Kučaev*: *Blagosostojanie i veščestvennyj spros*. In: *Statističeskoe izučenie sprosja i potreblenija*. Central'nyj Ekonomičeskij Matematičeskij Institut, Akademija Nauk SSSR, Moskau, Izdat. „Nauka“, 1966. — Aus einigen von sowjetischer Seite berechneten Nachfrage- und Einkommenselastizitäten im Vergleich mit entsprechenden Elastizitäten in den westlichen Ländern kann man praktisch keine Aufschlüsse über das Ausmaß der versteckten Rationierung gewinnen. Eine hier nur angedeutete Möglichkeit wäre, die von *Kučaev* berechneten „faktischen“ Einkommenselastizitäten mit entsprechenden neu zu berechnenden, aus Interviews gewonnenen „mentalistischen“ Elastizitäten zu vergleichen. Lügen dann die Werte der „faktischen“ unter denen der „mentalistischen“ Elastizitäten, so hätte man ein grobes quantitatives Kriterium für das Ausmaß der versteckten Rationierung. Derartige Versuche sind m. W. nicht vorgenommen worden.



Effekt. Wie *Hanson*<sup>29</sup> zu berichten weiß, findet von Zeit zu Zeit in der Sowjetunion ein Ausverkauf der „Ladenhüter“ zu stark ermäßigten Preisen statt, d. h. eine entsprechende Preispolitik versucht — mit welchem Erfolg auch immer —, dieser Quasirationierung entgegenzuwirken. Die eigentliche Ursache wird damit nicht beseitigt. Eine erfolversprechende Möglichkeit, mit dem Problem der Quasirationierung fertig zu werden, scheint in einer wissenschaftlich begründeten, bedarfsorientierten Konsumtionsplanung zu liegen, die, gestützt auf repräsentative Nachfragestudien der individuellen Konsumtion, die Konsumwünsche der sowjetischen Konsumenten wirklich in die Planungsvorbereitungen einbezieht. In diese Richtung gehen die Bemühungen der modernen sowjetischen Konsumforschung<sup>30</sup>.

Die Periode der offiziellen, strengen Rationierung reichte in der Sowjetunion vom Beginn des ersten Fünfjahresplanes (1928) bis etwa 1934 und nach siebenjähriger Unterbrechung vom Beginn des deutsch-sowjetischen Krieges bis Ende 1947. In diesen Zeitspannen existierten mindestens drei Arten von Märkten in der Sowjetunion. Zunächst bestand der rationierte Markt, wo Waren mit Zuteilungskarten gekauft werden konnten. Die Zuteilungsmengen hingen von der Art der Tätigkeit und von der gesellschaftlichen oder politischen Funktion des Zuteilungsberechtigten ab. Die auf dem rationierten Markt angebotenen Waren sollten nur das dringende physiologische Bedürfnis der Bevölkerung befriedigen. Während der größten Hungersnot in der sowjetischen Geschichte (1932-34), in der Kriegs- und unmittelbaren Nachkriegszeit war man selbst dazu nicht oder kaum in der Lage<sup>31</sup>. In der Festsetzung der rationierten Warenmenge unterschied sich die sowjetische Rationierung grundlegend von der während des Krieges eingeführten Rationierung in den westlichen Ländern. Die Preise für rationierte Waren lagen durchweg unter den Preisen für vergleichbare Waren auf den nicht rationierten Märkten.

<sup>29</sup> *Hanson*: a.a.O., S. 170 ff.

<sup>30</sup> Vgl. dazu: Dochody i pokupatel'skij spros naselenija. Central'nyj Ekonomičeskij Matematičeskij Institut, Akademija Nauk SSSR, Moskau, Izdat „Statistika“, 1968. — Ebenso die unter Fußnote 28 erwähnte Studie. — Einen kurzen Überblick über einige Hauptentwicklungslinien der modernen sowjetischen Konsumforschung vermittelt Alfred *Zauberman*: *Aspects of Planometrics*. London 1967. S. 44, 71 - 77. — Informativer ist die Dissertation von Wolfgang *Pistorius*: *Die Gewinnung von Informationen für die Konsumtionsplanung in der Sowjetunion und Modelle zu ihrer Verwendung*. Diss. München 1968.

<sup>31</sup> Angesichts dieser Tatsachen mag es zynisch anmuten, von einer Pareto-optimalen Versorgung sowjetischer Konsumenten sprechen zu wollen, während einer Zeit, als Hunderttausende oder gar Millionen zugrunde gingen. Doch möchte ich betonen, daß es mir hier nur darauf ankommt, die Wirkungsweise einer Rationierung über ein gespaltenes Marktsystem zu erklären. Dazu bietet sich das sowjetische System der dreißiger Jahre als ein geeignetes Untersuchungsobjekt an. Übrigens, wenn es dem Leser gefällt, kann er ähnliche Überlegungen für quasirationierte oder versteckt rationierte Systeme (sozialistischen Typs) anstellen.

An zweiter Stelle ist der staatlich und genossenschaftlich organisierte Markt zu nennen. Ein großer Teil der von den Kolchosen zu entrichtenden Zwangsablieferungen an den Staat (namentlich an Nahrungsmitteln) wurde von den in den Städten lokalisierten staatlichen Handelsgeschäften und Kaufhäusern zu Preisen angeboten, die gewöhnlich über den Preisen des rationierten Marktes und unter den Preisen des Kolchosmarktes lagen. Obwohl zwischen staatlichem und genossenschaftlichem (kooperativem) Handel institutionell streng zu trennen ist, weisen doch beide Formen bezüglich Preisfestsetzung und Warenangebot ähnliche Strukturelemente auf, so daß wir sie modellmäßig als einen Markt betrachten wollen.

Schließlich ist an dritter Stelle der sogenannte Kolchosmarkt zu nennen, der offiziell 1932 zugelassen wurde. Auf diesem Markt können die Kolchosen und ihre Mitglieder, nachdem sie ihrer Zwangsverpflichtung gegenüber dem Staat nachgekommen sind, ihre gemeinschaftlich oder privat erzielten Überschüsse an Waren absetzen. Der Kolchosmarkt nimmt zwar prozentual am Gesamtabsatz auf allen Märkten eine bescheidene Rolle ein, doch ist er bezüglich des Angebots von Nahrungsmitteln führend. Während auf dem rationierten Markt die Rationierungsbehörde sowohl die Angebotsmengen als auch die Preise bestimmt — ähnliches gilt, wenn auch nicht in so strenger Form, für den Handel auf dem staatlich und genossenschaftlich organisierten Markt —, richtet sich die Preisbildung auf dem Kolchosmarkt zumindest tendenziell nach Angebot und Nachfrage<sup>32</sup>.

Wir können also davon ausgehen, daß sich die sowjetische Konsumrationierung in den genannten Zeitspannen modellmäßig wie in einem gespaltenen Marktsystem abspielte, wo drei verschiedene Märkte vorherrschen.

*Das Modell:* Vereinfachend wird im folgenden angenommen, daß die auf den verschiedenen Märkten vorherrschenden Preise für alle Konsumenten gleichermaßen gelten, d. h. wir abstrahieren von diskriminierenden Preisen. Ebenso lassen wir regionale Preisdifferenzierungen außer acht, die den Kern der Argumentation nicht beeinflussen. Wir führen dann folgende Bezeichnungsweise ein:

Es seien

1.  $p_j^r$  der Preis der  $j$ -ten Ware auf dem rationierten Markt,  $j = 1, \dots, r$ ;  $r < m$ );
2.  $p_j^s$  der Preis der  $j$ -ten Ware auf dem staatlichen oder genossenschaftlichen Markt ( $j = 1, \dots, m$ );

<sup>32</sup> Bergson: a.a.O., S. 54.

3.  $p_j^k$  der Preis der  $j$ -ten Ware auf dem Kolchosmarkt ( $j = 1, \dots, m$ ). (Die Superskripte  $r, s, k$  beziehen sich auf die unter 1.-3. genannten Märkte.)

Dabei werden im folgenden dynamische Betrachtungen ausgeschlossen, d. h. es wird unterstellt, daß  $p_j^k$  bereits ein Gleichgewichtspreis ist, der für die gesamte angebotene Warenmenge konstant bleibt. In Wirklichkeit fluktuiert  $p_j^k$  entsprechend den jeweils vorherrschenden Angebots- und Nachfrageverhältnissen.

In Übereinstimmung mit der von den Sowjets praktizierten Konsumentenpolitik müssen nicht alle individuellen Konsumtionen gleich sein. Wir legen für jeden Konsumenten obere Grenzen für den Kauf von Waren auf den ersten beiden Märkten fest. Dann seien

1.  $x_{ij}^r$  die maximale Menge, die der  $i$ -te Konsument von der  $j$ -ten Ware auf dem rationierten Markt zu dem Preis  $p_j^r$  ( $j = 1, \dots, r$ ) kaufen darf, und

2.  $x_{ij}^s$  die maximale Menge, die der  $i$ -te Konsument von der  $j$ -ten Ware auf dem staatlichen oder genossenschaftlichen Markt zu dem Preis  $p_j^s$  ( $j = 1, \dots, m$ ) kaufen kann (oder will), einschließlich der maximalen Menge  $x_{ij}^r$ , die er auf dem rationierten Markt kaufen darf.

Es gilt die Ungleichung  $0 < x_{ij}^r < x_{ij}^s$ . Ferner seien  $x_{ij}$  die tatsächlich nachgefragte Warenmenge und  $z_{ij}$  jede vom  $i$ -ten Konsumenten zusätzlich nachgefragte Wareneinheit der  $j$ -ten Ware.

Definieren wir nun die Ausgabenfunktion des  $i$ -ten Konsumenten bezüglich der  $j$ -ten Ware, so können wir diese als das Riemann-Integral

$$(1) \quad \int_0^{x_{ij}} a_{ij}(z_{ij}) dz_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_{ij} = 0 \\ p_j^r x_{ij}, & \text{falls } x_{ij} \leq x_{ij}^r \\ p_j^r x_{ij}^r + p_j^s (x_{ij} - x_{ij}^r), & \text{falls } x_{ij}^r < x_{ij} \leq x_{ij}^s \\ p_j^r x_{ij}^r + p_j^s (x_{ij}^s - x_{ij}^r) + p_j^k (x_{ij} - x_{ij}^s), & \text{falls } x_{ij} < x_{ij}^s. \end{cases}$$

( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, r$ )

schreiben, vorausgesetzt, daß  $a_{ij}(z_{ij})$  integrierbar ist über dem abgeschlossenen, beschränkten Intervall  $[0, x_{ij}]$ <sup>33</sup>. Eine Zerlegung (Partition) von  $[0, x_{ij}]$  in endliche und disjunkte Teilmengen besteht hier aus den Teilintervallen  $[0, x_{ij}^r]$ ,  $(x_{ij}^r, x_{ij}^s]$ ,  $(x_{ij}^s, x_{ij}^k]$ . Somit kann die Integraldarstellung (1) als Summe von Teilintegralen umschrieben werden:

<sup>33</sup> Für eine Erklärung dieser Begriffe auf elementarem Niveau vgl. A. J. White: *Real Analysis*. London, Reading (Mass.) 1968.



$$(2) \quad \int_0^{x_{ij}} a_{ij}(z_{ij}) dz_{ij} = \int_0^{x_{ij}^r} a_{ij}(z_{ij}) dz_{ij} + \int_{x_{ij}^r}^{x_{ij}^s} a_{ij}(z_{ij}) dz_{ij} + \int_{x_{ij}^s}^{x_{ij}} a_{ij}(z_{ij}) dz_{ij} .$$

Die Teilintegrale sind bezüglich der so definierten Intervalle als Teilbudgets zu interpretieren.

Wir können die marginale Ausgabenfunktion  $a_{ij}(z_{ij})$  als stückweise konstant, d. h. als sogenannte Stufenfunktion annehmen<sup>34</sup>. Diesen Begriff hat Ames<sup>35</sup> in die Analyse der Sowjetwirtschaft eingeführt, und er erweist sich in einem gespaltenen Marktssystem als sehr nützlich. Da die marginale Ausgabenfunktion gleich dem auf einem bestimmten Markt vorherrschenden Preis ist, sieht man den stückweise konstanten Charakter dieser Funktion sehr leicht ein. Der Konsument darf auf dem rationierten Markt eine maximale Warenmenge  $x_{ij}^r$  zu einem Preis erwerben. Will er aber mehr als  $x_{ij}^r$  kaufen, so muß er für die zusätzliche Warenmenge den Preis  $p_j^s$  zahlen, und zwar bis zur maximalen Warenmenge  $x_{ij}^s$ . Will er noch mehr als  $x_{ij}^s$  kaufen, so muß er schließlich den Preis  $p_j^k$  zahlen. Die Preise  $p_j^r$ ,  $p_j^s$  und  $p_j^k$  sind gleichsam die „springenden Punkte“ der marginalen Ausgabenfunktion. Wir sprechen dann von einem *multiplen Preissystem*.

Die durchschnittliche Ausgabenfunktion ist entsprechend definiert als

$$(3) \quad \frac{1}{x_{ij}} \int_0^{x_{ij}} a_{ij}(z_{ij}) dz_{ij} = w_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_{ij} = 0 \\ p_j^r, & \text{falls } x_{ij} \leq x_{ij}^r \\ p_j^s, & \text{falls } x_{ij}^r < x_{ij} \leq x_{ij}^s \\ p_j^k, & \text{falls } x_{ij}^s < x_{ij} \end{cases} \quad (j = 1, \dots, r).$$

Für die  $j = r + 1, \dots, m$  nicht rationierten Waren ist die Ausgabenfunktion des  $i$ -ten Konsumenten das Integral

$$(4) \quad \int_{x_{ij}^r}^{x_{ij}} a_{ij}(z_{ij}) dz_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_{ij} = 0 \\ p_j^s x_{ij}, & \text{falls } x_{ij} \leq x_{ij}^s \\ p_j^s x_{ij}^s + p_j^k (x_{ij} - x_{ij}^s), & \text{falls } x_{ij}^s < x_{ij} \end{cases}$$

<sup>34</sup> Stetige Funktionen sind integrabel. Ein wichtiger Satz der Integralrechnung besagt, daß sich integrable Funktionen durch stückweise lineare oder stückweise konstante Funktionen approximieren lassen.

<sup>35</sup> Ames: a.a.O., Kap. 6.

und die entsprechende durchschnittliche Ausgabenfunktion

$$(5) \quad \frac{1}{x_{ij}} \int_{x_{ij}^r}^{x_{ij}} a_{ij}(z_{ij}) dz_{ij} = w_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_{ij} = 0 \\ p_j^s, & \text{falls } x_{ij} \leq x_{ij}^s \\ p_j^k, & \text{falls } x_{ij}^s < x_{ij}. \end{cases}$$

Nehmen wir nun — wie in Abschnitt II — an, jeder Konsument maximiere seinen Nutzen bezüglich seiner Einkommensbeschränkung und der für  $j = 1, \dots, r$  Waren festgelegten Rationierungsbeschränkung.

Diesem Problem entspricht die Maximierung der Lagrange-Form

$$(6) \quad \Phi_i = u_i(x_{i1}, \dots, x_{im}) - \lambda_i \left[ \mu_i - \sum_{j=1}^r \int_0^{x_{ij}} a_{ij}(z_{ij}) dz_{ij} - \sum_{j=r+1}^m \int_{x_{ij}^x}^{x_{ij}} a_{ij}(z_{ij}) dz_{ij} \right] \quad (i = 1, \dots, n).$$

(6) entspricht der Form (8) (Abschnitt II). Die Rationierungsbeschränkung ist hier in der Ausgabenfunktion  $\int_0^{x_{ij}} a_{ij}(z_{ij}) dz_{ij} = p_j^r x_{ij} \leq p_j^r x_{ij}^r$  (falls  $x_{ij} \leq x_{ij}^r, j = 1, \dots, r$ ) implizit enthalten, während sie in (8) explizit ausgewiesen ist.

Wenn wir (6) differenzieren und die Ableitungen gleich Null setzen, erhalten wir die notwendigen Bedingungen für die Existenz einer optimalen Lösung (wie in Abschnitt II gelten die hinreichenden Bedingungen als erfüllt):

$$(7) \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_{ij}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{ij}} - \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \int_0^{x_{ij}} a_{ij}(z_{ij}) dz_{ij} = 0 \quad \begin{matrix} (i = 1, \dots, n, \\ j = 1, \dots, m), \end{matrix}$$

$$(8) \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial \lambda_i} = \mu_i - \sum_{j=1}^m \int_0^{x_{ij}} a_{ij}(z_{ij}) dz_{ij} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Beschränken wir uns wieder auf den speziellen Zwei-Personen-Zwei-Waren-Fall. Die notwendigen Bedingungen für die Existenz eines Optimums lassen sich dann für Konsument I wie folgt angeben:

$$(9) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_{11}} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_{11}} \int_0^{x_{11}} a_{11}(z_{11}) dz_{11} = 0 ,$$

$$(10) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_{12}} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_{12}} \int_0^{x_{12}} a_{12}(z_{12}) dz_{12} = 0 ,$$

$$(11) \quad \mu_1 - \sum_{j=1}^2 \int_0^{x_{1j}} a_{1j}(z_{1j}) dz_{1j} = 0 .$$

Für Konsument II haben wir entsprechende Bedingungen:

$$(12) \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_{21}} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_{21}} \int_0^{x_{21}} a_{21}(z_{21}) dz_{21} = 0 ,$$

$$(13) \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_{22}} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_{22}} \int_0^{x_{22}} a_{22}(z_{22}) dz_{22} = 0 ,$$

$$(14) \quad \mu_2 - \sum_{j=1}^2 \int_0^{x_{2j}} a_{2j}(z_{2j}) dz_{2j} = 0 .$$

Wenn wir die zweite Ware als Numéraire wählen, dann reduziert sich (10) auf

$$(15) \quad (\partial u_1 / \partial x_{12}) - \lambda_1 = 0 ,$$

da allgemein  $a_{i2}(z_{i2}) = 1$  für beliebige Werte von  $x_{i2}$  ( $i = 1, 2$ ) ist. Dividieren wir (9) durch (15), so erhalten wir nach geringfügiger Veränderung

$$(16) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_{11}} / \frac{\partial u_1}{\partial x_{12}} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_{11}} \int_0^{x_{11}} a_{11}(z_{11}) dz_{11}}{1} = \frac{\partial}{\partial x_{11}} \int_0^{x_{11}} a_{11}(z_{11}) dz_{11} = a_{11}(z_{11}) .$$



Das ist die marginale Ausgabenfunktion in ausgeschriebener Form. Da die marginale Ausgabenfunktion gleich dem auf einem bestimmten Markt vorherrschenden Preis ist und sie bezüglich des Preises die gleiche Eigenschaft der stückweisen Konstanz wie die durchschnittliche Ausgabenfunktion aufweist, folgt aus (16) unmittelbar

$$(17) \quad \partial x_{12}/\partial x_{11} = p_1^h \quad (h = r, s, k).$$

Das bedeutet:

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial x_{11}} \int_0^{x_{11}} a_{11}(z_{11}) dz_{11} = p_1^h = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_{11} = 0 \\ p_1^r, & \text{falls } x_{11} \leq x_{11}^r \\ p_1^s, & \text{falls } x_{11}^r < x_{11} \leq x_{11}^s \\ p_1^k, & \text{falls } x_{11}^s < x_{11}. \end{cases}$$

Für Konsument II gelten analoge Überlegungen, die sich auf Gleichung (12) und die entsprechend reduzierte Form von Gleichung (13) stützen.

Wir gewinnen als Ergebnis

$$(19) \quad \partial x_{22}/\partial x_{21} = p_1^l \quad (l = r, s, k)$$

mit

$$(20) \quad \int_0^{x_{21}} a_{21}(z_{21}) dz_{21} = p_1^l = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_{21} = 0 \\ p_1^r, & \text{falls } x_{21} \leq x_{21}^r \\ p_1^s, & \text{falls } x_{21}^r < x_{21} \leq x_{21}^s \\ p_1^k, & \text{falls } x_{21}^s < x_{21}. \end{cases}$$

Wenn  $p_1^h = p_1^l$  gilt, dann folgt aus (17) und (19)

$$(21) \quad \partial x_{12}/\partial x_{11} = \partial x_{22}/\partial x_{21}.$$

Ein Vergleich mit Gleichung (3) (Abschnitt IV) zeigt, daß die notwendige Bedingung einer Pareto-optimalen Lösung vorliegt. Falls jedoch  $p_1^h \neq p_1^l$  ist, erfüllt diese Lösung nicht die notwendige Bedingung der Pareto-Optimalität.

Nach den Überlegungen in Abschnitt V wäre ein zusätzlicher Tausch für mindestens einen Konsumenten vorteilhaft, ohne die wirtschaftliche Lage des andern zu verschlechtern.

Ein Beispiel ist hier aufschlußreich. Die tatsächlich nachgefragte Warenmenge betrage für Konsument I:  $x_{1j}$  ( $x_{1j}^r < x_{1j} < x_{1j}^s$ ,  $j = 1, \dots, r$ ).

Seine Gesamtausgaben seien  $\int_0^{x_{1j}} a_{1j}(z_{1j}) dz_{1j} = p_j^r x_{1j}^r + p_j^s (x_{1j} - x_{1j}^r)$ .

Zum gleichen Preis  $p_j^s$  könnte nun Konsument I eine zusätzliche Warenmenge  $x_{1j}^s - x_{1j}$  kaufen. Die zusätzlichen Ausgaben betragen  $p_j^s (x_{1j}^s - x_{1j})$ .

Dagegen betrage die von Konsument II tatsächlich nachgefragte Warenmenge  $x_{2j}$  ( $x_{2j} > x_{2j}^s$ ,  $j = 1, \dots, r$ ). Seine Gesamtausgaben seien  $\int_0^{x_{2j}} a_{2j}(z_{2j}) dz_{2j} = p_j^r x_{2j}^r + p_j^s (x_{2j}^s - x_{2j}^r) + p_j^k (x_{2j} - x_{2j}^s)$ . Hier interessiert nur der dritte Summand der Ausgabenfunktion. Der Einfachheit halber und ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir  $x_{1j}^s - x_{1j} = x_{2j} - x_{2j}^s$  an. Da annahmegemäß  $p_j^k > p_j^s$  ist, haben wir  $p_j^k (x_{2j} - x_{2j}^s) > p_j^s (x_{1j}^s - x_{1j})$ . Demnach wäre ein weiterer Tausch der  $j$ -ten Ware zum Preis  $p_j^k$  zumindest für Konsument I vorteilhaft, während Konsument II dadurch nicht schlechter gestellt würde. Das entspricht wohlfahrtstheoretisch der Forderung: Konsument I sollte in einer suboptimalen Situation ( $p_j^h \neq p_j^l$ ) nicht sofort seinen Nutzen maximieren, sondern ihn erst nach einem weiteren Tausch (oder mehreren Tauschaktionen) bezüglich der Beschränkung maximieren, daß der Nutzen von Konsument II konstant bleibt.

So tritt die Forderung der Nutzenmaximierung in einem gespaltenen Marktsystem in anderer Form auf als in der traditionellen Konsumtheorie. Es ist klar, daß im Fall  $p_j^h = p_j^l$  kein Anreiz zu einem weiteren Tausch mehr besteht und niemand seine Situation verbessern kann, ohne die eines anderen zu verschlechtern.

Die hier vorgetragenen Überlegungen sind vereinbar mit Beobachtungen, daß in vorherrschend rationierten Wirtschaften mit einem *multiplen Preissystem* ein starker Hang zu freien oder schwarzen Märkten besteht. Der ausschließliche Erwerb von Waren auf dem rationierten Markt beeinträchtigt ein Pareto-optimales Versorgungssystem.

Die Einführung eines gespaltenen Marktsystems erlaubt unter gewissen Bedingungen eine Pareto-optimale Versorgung der Konsumenten sowohl in dem Fall, wo der Erwerb aller Waren nur über einen streng rationierten Markt möglich ist, als auch in dem Fall, wo rationierte und (bezüglich Warenangebot und Preisbildung) reglementierte Märkte gemeinsam existieren. Der letzte Fall ist am sowjetischen Beispiel diskutiert worden.

## Summary

### **Consumer Rationing and Pareto-Optimality. With an Application to the Soviet Economic System**

Using nonlinear programming techniques, the author analyzes the impact of consumer rationing to Pareto optimality. The notion of a partitioned market system is introduced to deal with both cases where rationing provides the only possibility of acquiring commodities and where rationed and non-rationed markets exist simultaneously. Rationing includes the possibility of non Pareto-optimal solutions, but the existence of a partitioned market system yields some “degrees of freedom” leading principally to Pareto optimality. In the special case of the Soviet system where rationing prevailed the consumer may under certain conditions achieve a Pareto-optimal state.