

Lorenz, Daniela

**Working Paper**

## Portfolioauswahl bei Besteuerung realisierter Kursänderungen

Diskussionsbeiträge, No. 2009/17

**Provided in Cooperation with:**

Free University Berlin, School of Business & Economics

*Suggested Citation:* Lorenz, Daniela (2009) : Portfolioauswahl bei Besteuerung realisierter Kursänderungen, Diskussionsbeiträge, No. 2009/17, Freie Universität Berlin, Fachbereich Wirtschaftswissenschaft, Berlin

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/37090>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

# Portfolioauswahl bei Besteuerung realisierter Kursänderungen

Daniela Lorenz

Fachbereich Wirtschaftswissenschaft

Diskussionsbeiträge

FACTS

2009/17

# PORTFOLIOAUSWAHL BEI BESTEUERUNG REALISierter KURSÄNDERUNGEN

Daniela Lorenz\*

10. November 2009

\* Wissenschaftliche Mitarbeiterin, Institut für Bank- und Finanzwirtschaft, Fachbereich Wirtschaftswissenschaft, Freie Universität Berlin, Boltzmannstr. 20, 14195 Berlin, Tel.: +49-30-838-52120, E-Mail: DL@wacc.de

Für stete Diskussionsbereitschaft und viele konstruktive Anmerkungen danke ich insbesondere Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Lutz Kruschwitz sowie Frau Maria Stefanova, Herrn Jonathan Bob und Herrn Robert Breitkreuz.

# INHALTSVERZEICHNIS

- 1 Problemstellung 2**
- 2 Modell 3**
  - 2.1 Annahmen 3
  - 2.2 Maximierungskalkül 6
- 3 Ergebnisse 8**
  - 3.1 Sofortkonsum 8
  - 3.2 Riskante Wertpapiere 8
  - 3.3 Risikolose Wertpapiere 13
- 4 Zahlenbeispiel 13**
- 5 Fazit und Ausblick 15**

# 1 PROBLEMSTELLUNG

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit der Portfolioauswahl eines risikoaversen Investors unter Unsicherheit und Steuern. Andere Arbeiten, die sich mit diesem Problem auseinandersetzen, gehen meist von der vereinfachenden Annahme einer sofortigen Besteuerung (accrual basis) aus.<sup>1</sup> Kurserfolge riskanter Wertpapiere unterliegen jedoch regelmäßig erst bei ihrer Realisation der Besteuerung. Deswegen haben Investoren einen Anreiz, Kursverluste so früh wie möglich, Kursgewinne dagegen so spät wie möglich zu realisieren.<sup>2</sup> Im Rahmen der Portfolioselektion muss bei der Abwägung zwischen Rendite und Risiko daher auch die Wahl des steuerlich optimalen Realisationszeitpunktes berücksichtigt werden.<sup>3</sup>

Theoretische Ansätze, die eine Veräußerungssteuer im Rahmen der intertemporalen Portfolioplanung explizit berücksichtigen, sind komplex und meist nicht ohne Einsatz numerischer Verfahren lösbar (vgl. etwa *Dammon et al.* (2001, 2004), *Ehling et al.* (2009), *Dybvig/Koo* (1996), *DeMiguel/Uppal* (2005)). Die vorliegende Untersuchung knüpft an diese Arbeiten an, erfolgt aber in einem einfachen Modellrahmen, der es im Gegensatz zu den genannten Beiträgen erlaubt, geschlossene Lösungen herzuleiten. Deswegen kann direkt analysiert werden, von welchen Einflussfaktoren die optimale Nachfrage nach Wertpapieren abhängt. Dadurch können sowohl Fälle identifiziert werden, in denen es optimal ist, auf Portfolioumschichtungen gänzlich zu verzichten, als auch solche, bei denen die optimale Nachfrage nach riskanten Wertpapieren nicht eindeutig bestimmt werden kann.

In der kürzlich erschienenen Arbeit *Jensen/Marekwica* (2009) gelingt es ebenfalls, analytische Lösungen abzuleiten. Die vorliegende Arbeit unterscheidet sich von dieser in mehrfacher Hinsicht: Im Modell von *Jensen/Marekwica* (2009) maximiert ein Investor den erwarteten Nutzen seines Endvermögens, indem er seine Ersparnisse in den vorangehenden Zeitpunkten geschickt anlegt. In der vorliegenden Arbeit wird dagegen unterstellt, dass sich der Entscheidungsträger am  $\mu$ - $\sigma$ -Prinzip orientiert. Darüber hinaus wird zugelassen, dass der Inves-

1 Vgl. etwa *Brennan* (1970) oder *Wiese* (2006), S. 97 ff.

2 Siehe etwa *Constantinides* (1983).

3 Siehe für eine Übersicht empirischer Befunde *Poterba* (2002).

tor Teile seines Vermögens schon vor Ende des Planungshorizonts konsumiert. Dadurch lässt sich feststellen, ob und inwiefern die Portfolioauswahl durch solche Konsumausgaben beeinflusst wird. Zudem müssen weniger restriktive Annahmen über die Nutzenfunktion getroffen werden.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Zunächst werden die Modellannahmen dargestellt und das Optimierungsproblem des Investors formalisiert. Die Ergebnisse hinsichtlich der Konsum-Spar-Entscheidung werden in Abschnitt 3 abgeleitet. Schließlich wird die Vorgehensweise anhand eines Zahlenbeispiels veranschaulicht.

## 2 MODELL

### 2.1 ANNAHMEN

Die Annahmen des Modells lassen sich in zwei Klassen einteilen. Zunächst wird auf die nicht-steuerlichen Prämissen eingegangen. Im Anschluss werden die Annahmen über das zugrunde liegende Steuersystem erläutert.

#### NICHT STEUERLICHE ANNAHMEN

Das Modell umfasst drei Zeitpunkte ( $t = -1, 0, 1$ ). Die Periode zwischen  $t = -1$  und  $t = 0$  wird als frühe Periode bezeichnet. Von der späten Periode ist die Rede, wenn der Zeitraum zwischen  $t = 0$  und  $t = 1$  gemeint ist.

Im Zeitpunkt  $t = 0$  trifft der Investor Entscheidungen über seinen Konsum-Spar-Plan. Jener Teil des Anfangsvermögens, den er im Zeitpunkt  $t = 0$  konsumiert, wird mit  $C_0$  bezeichnet. Der Rest des Anfangsvermögens wird gespart und für zukünftige Konsumzwecke ( $\tilde{C}_1$ ) verwendet. Der Investor legt seine Ersparnis in Form von Wertpapieren an. Dabei wird unterstellt, dass am Kapitalmarkt genau ein risikoloser Finanztitel  $B$  und ein riskanter, dividenloser Titel  $S$  gehandelt werden.<sup>4</sup> Das sichere Asset verzinst sich mit dem risikolosen Zinssatz  $r_f$ . Beide Wertpapiere sind beliebig teilbar.

<sup>4</sup> Dividenden können problemlos in das Modell integriert werden. Darauf wird hier lediglich aus Darstellungsgründen verzichtet. Darüber hinaus wird von der Berücksichtigung weiterer Wertpapiere abgesehen, da das zugrunde liegende Entscheidungskalkül auch im Mehr-Wertpapier-Fall erhalten bleibt und zudem keine analytischen Lösungen mehr möglich wären, vgl. *Jensen/Marekwica* (2009).

Das Vermögen des Investors besteht aus  $\bar{n}_B$  Einheiten des risikolosen und  $\bar{n}_S$  Einheiten des risikobehafteten Titels. Der Investor bestimmt neben dem Sofortkonsum die für ihn optimalen Wertpapiermengen ( $n_B$  und  $n_S$ ) und schichtet sein Anfangsportfolio entsprechend um. Der Preis des risikobehafteten Titels in  $t = 0$  ist sicher und wird mit  $S_0$  bezeichnet.

Im Zeitpunkt  $t = 1$  werden alle Finanztitel liquidiert, um den Zukunftskonsum zu finanzieren. Einzig über den Wert des riskanten Titels in  $t = 1$  besteht Unsicherheit. Wir bezeichnen diese unsichere Größe mit  $\tilde{S}_1$ . Der Investor bildet jedoch Erwartungen und kennt die Varianz des Wertpapierkurses.

Darüber hinaus stehen dem Investor Informationen über die vergangene Wertentwicklung des risikobehafteten Titels zur Verfügung. Der Kurs im Zeitpunkt  $t = -1$  wird mit  $S_{-1}$  bezeichnet und entspricht den Anschaffungskosten für das Papier. Tabelle (1) gibt einen Überblick über die verwendete Notation.

Tabelle 1: Notation

		$t = -1$	$t = 0$	$t = 1$
risikoloses Wertpapier	Wert	$\frac{B}{1+r_f}$	$B$	$B(1+r_f)$
	Menge	$\bar{n}_B$	$\bar{n}_B \rightarrow n_B$	$n_B \rightarrow 0$
riskantes Wertpapier	Wert	$S_{-1}$	$S_0$	$\tilde{S}_1$
	Menge	$\bar{n}_S$	$\bar{n}_S \rightarrow n_S$	$n_S \rightarrow 0$

Der Investor maximiert seinen individuellen Nutzen

$$U(C_0, E(\tilde{C}_1), \text{Var}(\tilde{C}_1)).$$

Dabei gilt

$$\frac{\partial U}{\partial E(\tilde{C}_1)} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial \text{Var}(\tilde{C}_1)} < 0.$$

Der Nutzen steigt im Erwartungswert und fällt in der Varianz des Konsums. Der Investor ist also ungesättigt und risikoavers.<sup>5</sup>

Schließlich wird angenommen, dass keine Leerverkaufsrestriktionen, Transaktionskosten oder Marktzutrittsbarrieren existieren. Ausgeschlossen werden jedoch Scheintransaktionen (so genannte *wash sales*), bei denen ein Papier zeit-

<sup>5</sup> Zum  $\mu$ - $\sigma$ -Prinzip als Entscheidungsregel siehe etwa *Kruschwitz* (2010), S. 143 ff.

gleich verkauft und wieder zurückgekauft wird.<sup>6</sup>

#### STEUERLICHE ANNAHMEN

Der Investor ist unbegrenzt steuerpflichtig. Gegenstand der Besteuerung sind ausschließlich Kapitaleinkünfte. Es wird unterstellt, dass diese mit einem einheitlichen, linearen Steuersatz  $\tau$  besteuert werden ( $0 \leq \tau < 1$ ). Die Bemessungsgrundlage  $BMG$  setzt sich aus den risikolosen Zinsen und den realisierten Kursänderungen des riskanten Titels zusammen. Es unterliegen also nicht Bucherfolge (accrual basis), sondern nur realisierte Kursgewinne oder -verluste der Besteuerung. Berechnet werden die relevanten Kursänderungen als Differenz zwischen dem Wert des Papiers im Veräußerungszeitpunkt und seinen Anschaffungskosten. Schließlich wird angenommen, dass negative Bemessungsgrundlagen zu einer sofortigen Steuererstattung führen (vollständiger Verlustausgleich). Formal lässt sich die Bemessungsgrundlage für den Zeitpunkt  $t = 0$  in der Form

$$BMG_0 = r_f \frac{B}{1+r_f} \bar{n}_B + (S_0 - S_{-1}) \max[\bar{n}_S - n_S, 0] \quad (1)$$

notieren. Die Zinsen ergeben sich als Produkt aus dem risikolosen Zinssatz  $r_f$  und dem Wert des risikolosen Teils der Anfangsausstattung in der Vorperiode  $\frac{B}{1+r_f} \bar{n}_B$ . Die Kursänderungen  $S_0 - S_{-1}$  werden dagegen nur dann besteuert, wenn sie realisiert werden. Die Veräußerungsmenge wird dabei durch eine Maximumfunktion beschrieben, die nur dann positive Werte annimmt, wenn die Nachfragemenge  $n_S$  kleiner als die Anfangsausstattung an riskanten Wertpapieren  $\bar{n}_S$  ist. Nur in diesem Fall liegt ein Wertpapierverkauf in Höhe von  $\bar{n}_S - n_S$  vor, der eine Steuerzahlung auslösen kann. Wird dagegen der Bestand an riskanten Finanztiteln erhöht ( $\bar{n}_S - n_S < 0$ ) oder unverändert gelassen ( $\bar{n}_S - n_S = 0$ ), bleiben eventuelle Kursänderungen unbesteuert. Analog gilt für die Bemessungsgrundlage im Zeitpunkt  $t = 1$

$$\widetilde{BMG}_1 = r_f B n_B + (\tilde{S}_1 - S_0) n_S + (S_0 - S_{-1})(\bar{n}_S - \max[\bar{n}_S - n_S, 0]). \quad (2)$$

<sup>6</sup> In Deutschland sind derartige Transaktionen nach § 20 WpHG verboten, da sie das Handelsvolumen künstlich erhöhen und damit falsche Signale setzen.



Neben den risikolosen Zinszahlungen  $r_f B n_B$  unterliegen die realisierten Kursänderungen des riskanten Wertpapiers der Besteuerung. Diese bestehen ihrerseits aus allen Kursänderungen  $\tilde{S}_1 - S_0$ , die in der späten Periode entstehen, sowie Wertänderungen der Vorperiode  $S_0 - S_{-1}$ , sofern sie nicht bereits im Zeitpunkt  $t = 0$  realisiert und besteuert wurden. Dies ist für  $\bar{n}_S - \max[\bar{n}_S - n_S, 0]$  der riskanten Wertpapiere der Fall. Sollte also ein Titel, der in der Anfangsausstattung des Investors enthalten war, nicht in  $t = 0$  veräußert werden, so müssen im Realisationszeitpunkt Kurserfolge in Höhe von  $\tilde{S}_1 - S_0 + S_0 - S_{-1} = \tilde{S}_1 - S_{-1}$  versteuert werden. Dies entspricht genau der Wertveränderung zwischen dem aktuellen Kurs und den Anschaffungskosten.

## 2.2 MAXIMIERUNGSKALKÜL

Bei der Maximierung der Nutzenfunktion

$$\max_{C_0, n_B, n_S} U(C_0, E(\tilde{C}_1), \text{Var}(\tilde{C}_1)) \quad (3)$$

sind Budgetrestriktionen zu beachten. Normiert man den Preis des Konsumguts auf eins (Numéraire), so lautet die Budgetrestriktion für den Zeitpunkt  $t = 0$

$$C_0 + n_B B + n_S S_0 = \bar{n}_B B + \bar{n}_S S_0 - \tau B M G_0. \quad (4)$$

Sie stellt sicher, dass die Ausgaben für den Sofortkonsum und das Portfolio aus Finanztiteln dem Nach-Steuer-Vermögen des Investors entsprechen. Für den Zeitpunkt  $t = 1$  gilt analog

$$\tilde{C}_1 = n_B B(1 + r_f) + n_S \tilde{S}_1 - \tau \widetilde{B M G}_1. \quad (5)$$

Löst man das Maximierungskalkül mit dem Lagrange-Ansatz, so empfiehlt es sich, die Budgetrestriktion für den Zeitpunkt  $t = 1$  über Bildung des Erwartungswertes und der Varianz

$$E(\tilde{C}_1) = n_B B(1 + r_f) + n_S E(\tilde{S}) - \tau E(\widetilde{B M G}_1) \quad (6)$$

$$\text{Var}(\tilde{C}_1) = n_S^2 \text{Var}(\tilde{S}) (1 - \tau)^2 \quad (7)$$

direkt in die Nutzenfunktion zu integrieren. Einsetzen der Bemessungsgrundlagen und Umformen führt auf die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & U\left(C_0; n_B B (1 + r_f(1 - \tau)) + n_S(E(\tilde{S}) - \tau(E(\tilde{S}) - S_0)) \right. \\ & \left. - \tau(S_0 - S_{-1})(\bar{n}_S - \max[\bar{n}_S - n_S, 0]); n_S^2 \text{Var}(\tilde{S})(1 - \tau)^2\right) \\ & + \lambda\left(C_0 + n_B B + n_S S_0 - \bar{n}_B \frac{1 + r_f(1 - \tau)}{1 + r_f} B - \bar{n}_S S_0 + \tau(S_0 - S_{-1}) \max[\bar{n}_S - n_S, 0]\right). \end{aligned}$$

Ex ante ist nicht bekannt, welchen Wert die enthaltenen Maximumfunktionen annehmen. Daher erfolgen die partiellen Ableitungen zunächst unter der Annahme, dass die Maximumfunktion den Wert null annimmt. Dies ist immer dann der Fall, wenn keine Veräußerung von riskanten Wertpapieren stattfindet ( $\bar{n}_S - n_S \leq 0$ ). Anschließend werden die Bedingungen erster Ordnung erneut aufgestellt, allerdings für den Fall, dass der Investor als Verkäufer agiert und die Maximumfunktion daher den Wert  $\bar{n}_S - n_S > 0$  annimmt. Erst durch Vergleich mit der Anfangsausstattung  $\bar{n}_S$  kann der Investor schließlich feststellen, welcher der beiden Fälle für ihn relevant ist.

#### BEDINGUNGEN ERSTER ORDNUNG FÜR KÄUFER

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_0} = U'(C_0) + \lambda = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_B} = U'(E(\tilde{C}_1))B(1 + r_f(1 - \tau)) + \lambda B = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_S} = & U'(E(\tilde{C}_1))(E(\tilde{S}) - \tau(E(\tilde{S}) - S_0)) \\ & + U'(\text{Var}(\tilde{C}_1)) 2 n_S \text{Var}(\tilde{S})(1 - \tau)^2 + \lambda S_0 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C_0 + n_B B + n_S S_0 - \bar{n}_B \frac{1 + r_f(1 - \tau)}{1 + r_f} B - \bar{n}_S S_0 = 0 \quad (11)$$

## BEDINGUNGEN ERSTER ORDNUNG FÜR VERKÄUFER

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_0} = U'(C_0) + \lambda = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_B} = U'(E(\tilde{C}_1))B(1 + r_f(1 - \tau)) + \lambda B = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_S} &= U'(E(\tilde{C}_1))(E(\tilde{S}) - \tau(E(\tilde{S}) - S_0) - \tau(S_0 - S_{-1})) \\ &\quad + U'(\text{Var}(\tilde{C}_1)) 2 n_S \text{Var}(\tilde{S})(1 - \tau)^2 + \lambda(S_0 - \tau(S_0 - S_{-1})) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C_0 + n_B B + n_S S_0 - \tilde{n}_B \frac{1 + r_f(1 - \tau)}{1 + r_f} B - \tilde{n}_S S_0 + \tau(S_0 - S_{-1})(\tilde{n}_S - n_S) = 0 \quad (15)$$

Die partiellen Ableitungen (14) und (15) enthalten im Vergleich zum Käufer-Fall zusätzliche Terme, die auf die Besteuerung realisierter Kurserfolge zurückzuführen sind. Das hat Konsequenzen für die optimale Wahl von  $C_0$ ,  $n_S$  und  $n_B$ .

## 3 ERGEBNISSE

### 3.1 SOFORTKONSUM

Auflösen von Gleichung (8) nach  $\lambda$  und Einsetzen in (9) liefert die Optimalitätsbedingung

$$\frac{U'(C_0)}{U'(E(\tilde{C}_1))} = 1 + r_f(1 - \tau). \quad (16)$$

Danach soll der Investor im Zeitpunkt  $t = 0$  gerade auf so viel Konsum verzichten, dass seine Zeitpräferenzrate mit dem risikolosen Zinssatz nach Steuern übereinstimmt. Dieses Ergebnis ist unabhängig vom Anfangsvermögen des Investors. Das optimale Konsumniveau  $C_0$  hängt nur von dem Verhältnis zwischen dem Grenznutzen des heutigen und dem Grenznutzen des künftigen Konsums ab und ist unabhängig von der Aufteilung der Ersparnis in riskante und risikolose Finanztitel. Wird der Verkäufer-Fall betrachtet (Gleichungen (12) und (13)), ergibt sich die gleiche Optimalitätsbedingung.

### 3.2 RISKANTE WERTPAPIERE

Um direkte Nachfragefunktionen für die riskanten Wertpapieren zu gewinnen, löst man (9) bzw. (13) nach  $\lambda$  auf und setzt in (10) bzw. (14) ein. Da die par-

tiellen Ableitungen für Käufer und Verkäufer nicht identisch sind, muss auch hier eine Fallunterscheidung erfolgen. Um die beiden Nachfragefunktionen zu unterscheiden, notieren wir  $n_S^k$ , wenn die optimale Nachfragemenge für Käufer gemeint ist, und  $n_S^v$ , wenn von der Wertpapieranzahl der Verkäufer die Rede ist.

Die Nachfragemenge eines Investors, der im Zeitpunkt  $t = 0$  keine riskanten Wertpapiere veräußert, sondern seinen Anfangsbestand konstant hält oder weitere Wertpapiere kauft,

$$n_S^k = \frac{E(\tilde{S}) - S_0(1 + r_f)}{-2 \frac{U'(\text{Var}(\tilde{C}_1))}{U'(E(\tilde{C}_1))} \text{Var}(\tilde{S})(1 - \tau)}, \quad (17)$$

ist unabhängig von der Veräußerungssteuer. Die direkte Nachfragefunktion in einer Welt mit sofortiger Besteuerung würde die gleiche Gestalt annehmen.<sup>7</sup> Die Besteuerung realisierter Kurserfolge führt bei Verkäufern hingegen zu einer Verzerrung im optimalen Nachfrageverhalten,

$$n_S^v = \frac{E(\tilde{S}) - S_0(1 + r_f) + r_f \tau (S_0 - S_{-1})}{-2 \frac{U'(\text{Var}(\tilde{C}_1))}{U'(E(\tilde{C}_1))} \text{Var}(\tilde{S})(1 - \tau)}, \quad (18)$$

denn bei einer sofortigen Besteuerung von Kursänderungen entspricht die Nachfragefunktion sowohl für Käufer als auch für Verkäufer der Gleichung (17). Das modellierte Steuersystem ist daher nicht investitionsneutral. Der zusätzliche Term  $r_f \tau (S_0 - S_{-1})$  misst dabei die einperiodige Verzinsung der Steuereffekte vergangener Kursänderungen und kann als Maßstab für einen Lock-In-Effekt interpretiert werden: Konnten in der frühen Periode Kursgewinne erzielt werden ( $S_0 - S_{-1} > 0$ ), so hält ein Verkäufer mehr riskante Wertpapiere als bei sofortiger Besteuerung (Gleichung (17)). Das hier modellierte Steuersystem veranlasst den Investor also bei günstiger Kursentwicklung weniger riskante Finanztitel zu verkaufen. Damit werden Steuerzahlungen auf solche Gewinne in die Zukunft verschoben. Hatte das Wertpapier in der frühen Periode dagegen Verluste zu verzeichnen ( $S_0 - S_{-1} < 0$ ), so empfiehlt es sich, mehr riskante Wertpapiere zu verkaufen als bei sofortiger Besteuerung und Kursverluste somit frühzeitig zu realisieren. Die Abhängigkeit der Nachfragefunktionen (17) und (18) von der

<sup>7</sup> Vgl. *Dyl* (1979).

vergangenen Wertentwicklung des riskanten Finanztitels ist in Abbildung (1) dargestellt.

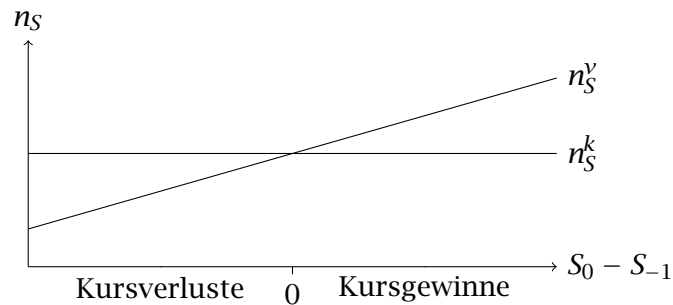


Abbildung 1: Nachfrage in Abhängigkeit vergangener Kursänderungen

Welche der beiden Nachfragefunktionen für den Investor relevant ist, hängt davon ab, ob der Investor am Kapitalmarkt als Käufer oder als Verkäufer agiert. Das wird wiederum durch seine Anfangsausstattung an riskanten Wertpapieren  $\bar{n}_S$  determiniert. Wenden wir uns zunächst dem Fall zu, in dem das riskante Wertpapier in der frühen Periode an Wert gewonnen hat ( $S_0 - S_{-1} > 0$ ).

#### GEWINNFALL

Wie bereits festgestellt, gilt im Gewinnfall  $n_S^k < n_S^v$ . Ist nun die Anfangsausstattung an riskanten Titeln geringer als  $n_S^k$ , so kauft der Investor genau so viele Wertpapiere hinzu, bis er die optimale Anzahl für Käufer  $n_S^k$  erreicht. Liegt die im Anfangsportfolio enthaltene Menge dagegen über  $n_S^v$ , besteht die optimale Handelsstrategie darin, Teile der Anfangsausstattung zu veräußern, bis der Investor schließlich bei der optimalen Nachfragemenge für Verkäufer  $n_S^v$  angekommen ist. Darüber hinaus ist jedoch ein dritter Fall denkbar: Wenn die Anfangsausstattung zwischen den beiden Optimalwerten liegt ( $n_S^k < \bar{n}_S < n_S^v$ ), kann der Investor weder durch Veräußerung die Menge  $n_S^v$ , noch durch Erwerb weiterer Wertpapiere  $n_S^k$  erreichen. Keiner der beiden Optimalwerte ist realisierbar. Der Investor lässt folglich seinen Bestand an riskanten Wertpapieren unverändert (stillhalten).<sup>8</sup> Veranschaulicht werden die drei Fälle in Abbildung (2).

<sup>8</sup> Vgl. Jensen/Marekwica (2009).

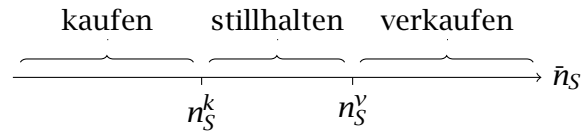


Abbildung 2: Gewinnfall: Abhängigkeit von der Anfangsausstattung  $\bar{n}_S$

#### VERLUSTFALL

In Situationen, in denen der risikobehaftete Finanztitel an Wert verloren hat ( $S_0 - S_{-1} < 0$ ), ist  $n_S^k > n_S^v$ . Hier gilt analog zum Gewinnfall, dass verkauft wird, wenn die Anfangsausstattung größer als die optimale Wertpapieranzahl für Verkäufer ist. Umgekehrt wird der Bestand an Wertpapieren erhöht, falls  $\bar{n}_S < n_S^k$  gilt (vgl. Abbildung (3)). Besondere Aufmerksamkeit verdienen Fälle, in denen die im Anfangsportfolio enthaltene Menge an riskanten Titeln zwischen  $n_S^k$  und  $n_S^v$  liegt. Hier kann sowohl der Erwerb als auch der Verkauf von Wertpapieren nutzenmaximal sein. Beide Optimalwerte sind erreichbar, so dass eine Entscheidung zwischen ihnen erst durch Überprüfung der resultierenden Nutzenwerte  $U(f(n_S^k))$  und  $U(f(n_S^v))$  getroffen werden kann.<sup>9</sup> Es ist sogar möglich, dass beide Alternativen dasselbe Nutzenniveau versprechen. In diesem Fall liefert das Modell keine eindeutige Lösung, und der Investor ist folglich indifferent zwischen Zu- und Verkäufen.

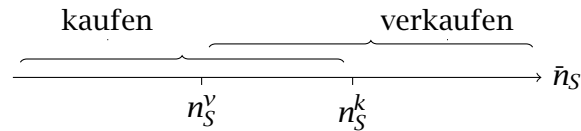


Abbildung 3: Verlustfall: Abhängigkeit von der Anfangsausstattung  $\bar{n}_S$

Fasst man diese Überlegungen zusammen, so lassen sich in Abhängigkeit

<sup>9</sup> Unter der zusätzlichen Annahme eines Präferenzfunktionals der Form  $U(C_0, E(\tilde{C}_1), \text{Var}(\tilde{C}_1)) = U(C_0) + bE(\tilde{C}_1) - c\text{Var}(\tilde{C}_1)$  mit  $b, c > 0$  kann gezeigt werden, dass  $U(f(n_S^k)) \geq U(f(n_S^v))$  genau dann gilt, wenn

$$\bar{n}_S \geq \frac{n_S^k + n_S^v}{2}.$$

Der Investor wählt also den Optimalwert  $n_S^k$ , sofern seine Anfangsausstattung an riskanten Wertpapieren nicht geringer als der Mittelwert aus beiden Optimalwerten ist. Zum Beweis siehe Anhang A1.

von der Anfangsausstattung und der Kursentwicklung die vier in Abbildung (4) dargestellten Fälle unterscheiden. Liegt die anfängliche Wertpapiermenge  $\bar{n}_S$

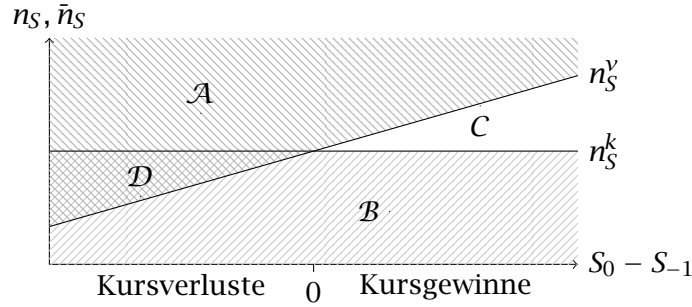


Abbildung 4: Fallunterscheidungen des optimalen Nachfrageverhaltens

innerhalb der Fläche  $\mathcal{A}$ , so verkauft der Investor im Optimum gerade so viele Anteile seiner Wertpapierausstattung, bis er  $n_S^V$  erreicht. Liegt sie in der Fläche  $\mathcal{B}$ , ist es optimal, den Bestand an riskanten Titeln auf  $n_S^k$  aufzustocken. Hat das Wertpapier in der frühen Periode an Wert gewonnen, so ist es möglich, dass  $n_S^V > \bar{n}_S > n_S^k$  ist (Fläche  $\mathcal{C}$ ). In diesem Fall sollte der Investor seinen Anfangsbestand konstant halten. Weniger eindeutig fällt die Handlungsanweisung für Fläche  $\mathcal{D}$  aus. Hier kann sowohl der Verkauf von Teilen der Anfangsausstattung (bis  $n_S^V$ ) als auch der Erwerb zusätzlicher Titel (bis  $n_S^k$ ) nutzenmaximal sein.<sup>10</sup> Die optimale Nachfrage nach riskanten Wertpapieren lautet demnach

$$n_S^* = \begin{cases} \bar{n}_S, & \text{wenn } \bar{n}_S \in \mathcal{C}, \\ n_S^k, & \text{wenn } \bar{n}_S \in \mathcal{B} \vee (\bar{n}_S \in \mathcal{D} \wedge U(f(n_S^k)) \geq U(f(n_S^V))), \\ n_S^V, & \text{wenn } \bar{n}_S \in \mathcal{A} \vee (\bar{n}_S \in \mathcal{D} \wedge U(f(n_S^k)) \leq U(f(n_S^V))). \end{cases} \quad (19)$$

Damit hängt sie sowohl von der vergangenen Wertentwicklung des riskanten Titels als auch von der Anfangsausstattung des Investors ab.<sup>11</sup>

10 Werden so genannte *wash sales* zugelassen, kann gezeigt werden, dass Fläche  $\mathcal{D}$  verschwindet. Für alle  $\bar{n}_S \leq n_S^k$  ist es dann nutzenmaximal, den Optimalwert  $n_S^k$  zu wählen. Die Portfolioauswahl ist unter diesen Umständen stets eindeutig.

11 Die entsprechenden Abhängigkeiten sind in Abbildung (5) und (6) im Anhang A2 veranschaulicht.

### 3.3 RISIKOLOSE WERTPAPIERE

Den Teil des Nach-Steuer-Vermögens, der nicht konsumiert oder in riskante Wertpapiere investiert wird, legt der Investor sicher an. Dabei ist es durchaus möglich, dass die Nachfragemenge negative Werte annimmt, der Investor also zusätzliches Kapital aufnimmt. Sind das optimale Konsumniveau  $C_0^*$  und die Menge an riskanten Wertpapieren  $n_S^*$  bestimmt, so ergibt sich die risikolose Ersparnis unmittelbar aus der Bedingung (11) bzw. (15). Sie spiegelt die Budgetrestriktion für den Zeitpunkt  $t = 0$  wider. Durch Einsetzen von  $n_S^*$  und Auflösen erhält man schließlich die fallabhängige optimale Nachfrage nach sicheren Wertpapieren

$$n_B^* = \begin{cases} \bar{n}_B \frac{1+r_f(1-\tau)}{1+r_f} - \frac{C_0^*}{B}, & \text{wenn } n_S^* = \bar{n}_S, \\ \bar{n}_B \frac{1+r_f(1-\tau)}{1+r_f} - \frac{C_0^*}{B} + (\bar{n}_S - n_S^k) \frac{S_0}{B}, & \text{wenn } n_S^* = n_S^k, \\ \bar{n}_B \frac{1+r_f(1-\tau)}{1+r_f} - \frac{C_0^*}{B} + (\bar{n}_S - n_S^v) \frac{S_0 - \tau(S_0 - S_{-1})}{B}, & \text{wenn } n_S^* = n_S^v. \end{cases} \quad (20)$$

### 4 ZAHLENBEISPIEL

Die Vorgehensweise soll abschließend anhand eines einfachen Zahlenbeispiels veranschaulicht werden. Über den am Kapitalmarkt gehandelten riskanten Finanztitel seien die in Tabelle 2 angegebenen Informationen bekannt.

Tabelle 2: Zahlenbeispiel

$S_0$	$E(\tilde{S})$	$\text{Var}(\tilde{S})$
20	25	15

Der Wert des risikolosen Wertpapiers in  $t = 0$  liege bei  $B = 50$ . Der Steuersatz betrage  $\tau = 50\%$  und der risikolose Zinssatz  $r_f = 10\%$ . Ein risikoaverser Investor mit der Nutzenfunktion

$$U(C_0, E(\tilde{C}_1), \text{Var}(\tilde{C}_1)) = 42 \ln C_0 + 20 E(\tilde{C}_1) - 2 \text{Var}(\tilde{C}_1)$$

muss entscheiden, wie viel er sofort konsumiert ( $C_0^*$ ) und wie viel er riskant ( $n_S^*$ ) beziehungsweise risikolos ( $n_B^*$ ) spart. Sein Anfangsportfolio bestehe aus  $\bar{n}_B = 5$



risikolosen und  $\bar{n}_S = 1,9$  riskanten Wertpapieren.

Auf Grundlage dieser Informationen lässt sich mit Hilfe der Optimalitätsbedingung (16) unmittelbar der optimale Sofortkonsum berechnen, wobei sich  $C_0^* = 2$  ergibt. Die Entscheidung des Investors bezüglich seiner riskanten und risikolosen Ersparnis ist jedoch davon abhängig, ob das unsichere Wertpapier in der frühen Periode im Wert gestiegen oder gefallen ist.

#### GEWINNFALL

Wird angenommen, dass die Anschaffungskosten des Papiers in der Vorperiode bei  $S_{-1} = 14$  lagen, so beträgt der Kursgewinn 6 Geldeinheiten. Um die Nachfrage  $n_S^*$  zu bestimmen, werden zunächst die Werte  $n_S^k$  und  $n_S^v$  ermittelt. Entsprechend der Gleichungen (17) und (18) belaufen sie sich auf

$$n_S^k = \frac{25 - 20 \cdot (1 + 0,1)}{-2 \cdot \frac{-2}{20} \cdot 15 \cdot (1 - 0,5)} = 2$$

$$n_S^v = \frac{25 - 20 \cdot (1 + 0,1) + 0,1 \cdot 0,5 \cdot (20 - 14)}{-2 \cdot \frac{-2}{20} \cdot 15 \cdot (1 - 0,5)} = 2,2.$$

Der Investor ist anfänglich mit  $\bar{n}_S = 1,9$  riskanten Wertpapieren ausgestattet. Daher kommt der Optimalwert  $n_S^v$  für ihn nicht in Frage, da er einen Bestand von 2,2 Wertpapieren nicht durch Veräußerung erreichen kann. Erwirbt er dagegen 0,1 zusätzliche Wertpapiere, so gelangt er zum Optimalwert für Käufer (Fläche  $\mathcal{B}$ ). Die optimale Nachfrage nach riskanten Wertpapieren lautet demnach  $n_S^* = n_S^k = 2$  (siehe Gleichung (19)). Schließlich muss der Investor noch die Menge an sicheren Titeln bestimmen. Einsetzen in Gleichung (20) führt zu

$$n_B^* = 5 \cdot \frac{1 + 0,1 \cdot (1 - 0,5)}{1 + 0,1} - \frac{2}{50} + (1,9 - 2) \cdot \frac{20}{50} = 4,69.$$

Mit keiner anderen Kombination von  $C_0$ ,  $n_S$  und  $n_B$  lässt sich ein höheres Nutzenniveau erreichen.

#### VERLUSTFALL

Bei  $S_{-1} = 26$  liegt ein Kursverlust in Höhe von 6 Geldeinheiten vor. Analog zur Vorgehensweise im Gewinnfall werden zunächst die optimalen Wertpapiermengen für Käufer und Verkäufer ermittelt. Sie belaufen sich auf  $n_S^k = 2$  und

$n_S^V = 1,8$ . Da der Investor anfänglich mit  $\bar{n}_S = 1,9$  riskanten Titeln ausgestattet ist, sind beide Optimalwerte für ihn erreichbar (Fläche  $\mathcal{D}$ ), und eine Entscheidung ist erst durch Vergleich der resultierenden Nutzenwerte  $U(f(n_S^k))$  und  $U(f(n_S^V))$  möglich. Zu diesem Zweck werden die sichere Ersparnis entsprechend Gleichung (20) sowie Erwartungswert und Varianz des Zukunftskonsums (gemäß Gleichungen (6) und (7)) berechnet. Sollte der Investor den Optimalwert  $n_S^k = 2$  wählen, belaufen sie sich auf

$$n_B^* = 4,69, \quad E(\tilde{C}_1) = 297,07, \quad \text{Var}(\tilde{C}_1) = 15,$$

bei Wahl von  $n_S^V = 1,8$  hingegen auf

$$n_B^* = 4,78, \quad E(\tilde{C}_1) = 296,78, \quad \text{Var}(\tilde{C}_1) = 12,15.$$

Setzt man diese Werte jeweils in die Nutzenfunktion ein, so beträgt der Nutzenwert in beiden Fällen  $U(C_0, E(\tilde{C}_1), \text{Var}(\tilde{C}_1)) = 5940,48$ .<sup>12</sup> Bei der Kaufstrategie wird die höhere Varianz des Zukunftskonsums durch einen höheren Erwartungswert kompensiert. Die Portfolioauswahl ist in diesem Fall nicht eindeutig. Vielmehr ist der Investor indifferent zwischen Kaufen und Verkaufen.

## 5 FAZIT UND AUSBLICK

Ziel des vorliegenden Betrags war es, das optimale Spar- und Konsumverhalten eines risikoaversen Investors zu untersuchen, wenn ein Steuersystem zugrunde gelegt wird, bei dem Kursänderungen erst bei Realisation besteuert werden. Das Modell basiert auf einer Reihe von vereinfachenden Annahmen, die insbesondere nur ein riskantes und ein risikoloses Wertpapier zulassen und einen Planungshorizont von lediglich einer Periode vorsehen. Dem Investor stehen jedoch Informationen über die vergangene Kursentwicklung des riskanten Wertpapiers zur Verfügung. In diesem Modellrahmen gelingt es, analytische Lösungen abzuleiten.

Es konnte festgestellt werden, dass die Vermögensaufteilung des Investors in Sofortkonsum und Ersparnis durch die Besteuerung realisierter Kursänderun-

<sup>12</sup> Abweichungen sind auf Rundungen zurückzuführen.

gen nicht beeinflusst wird. Die Konsumententscheidung kann somit separat von Investitions- und Realisationsplänen getroffen werden. Verzerrungen konnten jedoch hinsichtlich der optimalen riskanten Ersparnis nachgewiesen werden: Während Käufer des Wertpapiers nicht von der Veräußerungssteuer beeinflusst werden, hängt der optimale Wertpapierbestand für Verkäufer auch von der vergangenen Kursentwicklung des Wertpapiers ab: Bei Kursverlusten wird mehr verkauft und bei Kursgewinnen weniger als bei einer sofortigen Besteuerung (Lock-In-Effekt). Bei einer gegebenen Kursänderung weisen Käufer und Verkäufer riskanter Titel daher in der Regel verschiedene Nachfragefunktionen auf. Welche dabei für den Investor relevant ist, wird durch seine Anfangsausstattung bestimmt.

Darüber hinaus konnten zum einen Fälle identifiziert werden, in denen keiner der beiden Nachfragewerte erreichbar ist und der Investor in Folge dessen den riskant investierten Portfolioanteil nicht umschichtet. Zum anderen existieren Fälle, in denen beide Nachfragewerte exakt denselben Nutzen stiften. Die optimale Handlungsanweisung ist demnach nicht notwendigerweise eindeutig. Die Höhe der sicheren Ersparnis stellt schließlich eine bloße Residualgröße dar: Reicht das Nachsteuer-Vermögen des Investors aus, um den Sofortkonsum und die riskante Wertpapieranlage zu finanzieren, werden sichere Finanztitel erworben, andernfalls werden Leerverkäufe getätigt.

Es besteht weiterer Forschungsbedarf insbesondere in der zusätzlichen Berücksichtigung von Transaktionskosten. Ferner muss untersucht werden, welche Auswirkung das hier betrachtete Steuerregime auf das Diversifikationsverhalten der Marktteilnehmer und auf Gleichgewichtspreise hat.

## LITERATUR

Brennan, Michael J. (1970) "Taxes, Market Valuation and Corporate Financial Policy", *National Tax Journal*, Vol. 23, Nr. 4, 417-427.

Constantinides, George M. (1983) "Capital Market Equilibrium with Personal Tax", *Econometrica*, Vol. 51, Nr. 3, 611-636.

- Dammon, Robert M., Spatt, Chester S. und Zhang, Harold H. (2001) "Optimal Consumption and Investment with Capital Gains Taxes", *The Review of Financial Studies*, Vol. 14, Nr. 3, 583–616.
- Dammon, Robert M., Spatt, Chester S. und Zhang, Harold H. (2004) "Optimal Asset Location and Allocation with Taxable and Tax-Deferred Investing", *The Journal of Finance*, Vol. 59, Nr. 3, 999–1037.
- DeMiguel, Victor und Uppal, Raman (2005) "Portfolio Investment with the Exact Tax Basis via Nonlinear Programming", *Management Science*, Vol. 51, Nr. 2, 277–290.
- Dybvig, Philip H. und Koo, Hyeng K. (1996) "Investment with Taxes", *Working Paper*, Washington University.
- Dyl, Edward A. (1979) "A State Preference Model of Capital Gains Taxation", *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 14, Nr. 3, 529–535.
- Ehling, Paul, Gallmeyer, Michael, Srivastava, Sanya und Tompaidis, Stathis (2009) "Portfolio Choice with Capital Gain Taxation and the Limited Use of Losses", *McCombs Research Paper Series*, Nr. IROM-02-08, Texas University.
- Jensen, Bjarne A. und Marekwica, Marcel (2009) "Optimal Portfolio Choice with Wash Sales Constraints", *Working Paper*, Copenhagen Business School.
- Kruschwitz, Lutz (2010) *Finanzierung und Investition*, 6. Auflage, Oldenbourg, München, Wien.
- Poterba, James M. (2002) *Taxation, Risk-Taking, and Household Portfolio Behavior*, in: Auerbach Alan J. und Feldstein, Martin (Hrsg.) *Handbook of Public Economics*, Vol. 3, chapter 17, 1109–1171, Amsterdam.
- Wiese, Jörg (2006) "Komponenten des Zinsfußes in Unternehmensbewertungskalkülen, Theoretische Grundlagen und Konsistenz", Peter Lang Verlag, Frankfurt.

## ANHANG

### A1. BEWEIS

Im Verlustfall mit  $n_S^k > \bar{n}_S > n_S^v$  existieren zwei erreichbare lokale Maxima,  $n_S^k$  und  $n_S^v$ . Es soll gezeigt werden, dass ein Investor mit dem speziellen Präferenzfunktional  $U(C_0, E(\tilde{C}_1), \text{Var}(\tilde{C}_1)) = U(C_0) + bE(\tilde{C}_1) - c\text{Var}(\tilde{C}_1)$  mit  $b, c > 0$  genau dann das Maximum  $n_S^k$  wählt, falls seine Anfangsausstattung an riskanten Wertpapieren den Mittelwert aus beiden Maxima nicht unterschreitet,

$$\bar{n}_S \geq \frac{n_S^k + n_S^v}{2}.$$

Zu diesem Zweck werden in Abhängigkeit von der Anfangsausstattung  $\bar{n}_S$  die resultierenden Nutzenniveaus beider Optimalwerte  $U(f(n_S^k))$  und  $U(f(n_S^v))$  verglichen. Setzt man zunächst den Erwartungswert und die Varianz in das Präferenzfunktional ein, so beträgt der Nutzen in allgemeiner Form

$$\begin{aligned} U(C_0, E(\tilde{C}_1), \text{Var}(\tilde{C}_1)) &= U(C_0) \\ + b \left( n_B B (1 + r_f) + n_S E(\tilde{S}) - \tau (r_f B n_B + (E(\tilde{S}) - S_0) n_S + (S_0 - S_{-1}) (\bar{n}_S - \max[\bar{n}_S - n_S, 0])) \right) \\ &\quad - c (n_S^2 \text{Var}(\tilde{S}) (1 - \tau)^2). \end{aligned}$$

Falls der Investor  $n_S^k$  wählt, also weitere riskante Wertpapiere zuzukaufen, nimmt die Maximumfunktion den Wert null an. Andernfalls entscheidet sich der Investor für  $n_S^v$  (Verkauf), und die Maximumfunktion beläuft sich auf  $\bar{n}_S - n_S^v$ . Da die Wahl von  $n_S$  die Nachfrage nach sicheren Wertpapieren determiniert, wird im Folgenden  $n_B^k$  ( $n_B^v$ ) notiert, sofern es sich um die Anzahl risikoloser Wertpapiere handelt, die ein Investor nachfragt, der zeitgleich das riskante Papier kauft (verkauft). Nach geringfügigem Umformen erhält man für den Optimalwert  $n_S^k$

$$\begin{aligned} U(C_0, E(\tilde{C}_1), \text{Var}(\tilde{C}_1)) &= U(C_0) \\ + b \left( n_B^k B (1 + r_f (1 - \tau)) + n_S^k (E(\tilde{S}) - \tau (E(\tilde{S}) - S_0)) - \bar{n}_S \tau (S_0 - S_{-1}) \right) \\ &\quad - c ((n_S^k)^2 \text{Var}(\tilde{S}) (1 - \tau)^2) \quad (21) \end{aligned}$$

und für den Optimalwert  $n_S^y$

$$\begin{aligned}
U(C_0, E(\tilde{C}_1), \text{Var}(\tilde{C}_1)) &= U(C_0) \\
&+ b(n_B^y B (1 + r_f(1 - \tau)) + n_S^y(E(\tilde{S}) - \tau(E(\tilde{S}) - S_0)) - n_S^y \tau(S_0 - S_{-1})) \\
&- c((n_S^y)^2 \text{Var}(\tilde{S}) (1 - \tau)^2). \quad (22)
\end{aligned}$$

Hinzukaufen lohnt immer dann, falls der resultierende Nutzen (21) nicht kleiner ist als bei der Verkaufstrategie (22). Nach Herauskürzen von  $U(C_0)$  und Umstellen nach  $\bar{n}_S$  lautet die Bedingung hierfür

$$\begin{aligned}
(n_B^k - n_B^y) \frac{B(1 + r_f(1 - \tau))}{(S_0 - S_{-1})\tau} + (n_S^k - n_S^y) \frac{E(\tilde{S}) - \tau(E(\tilde{S}) - S_0)}{(S_0 - S_{-1})\tau} + n_S^y \\
- ((n_S^k)^2 - (n_S^y)^2) \frac{\frac{c}{b} \text{Var}(\tilde{S}) (1 - \tau)^2}{(S_0 - S_{-1})\tau} \geq \bar{n}_S.
\end{aligned}$$

Die enthaltene Differenz  $n_B^k - n_B^y$  lautet entsprechend Gleichung (20)

$$n_B^k - n_B^y = (\bar{n}_S - n_S^y) \frac{\tau(S_0 - S_{-1})}{B} - (n_S^k - n_S^y) \frac{S_0}{B}.$$

Nach Einsetzen dieser Differenz und Umformen

$$\begin{aligned}
(\bar{n}_S - n_S^y)(1 + r_f(1 - \tau)) + (n_S^k - n_S^y) \frac{E(\tilde{S}) - \tau(E(\tilde{S}) - S_0) - S_0(1 + r_f(1 - \tau))}{(S_0 - S_{-1})\tau} + n_S^y \\
- ((n_S^k)^2 - (n_S^y)^2) \frac{\frac{c}{b} \text{Var}(\tilde{S}) (1 - \tau)^2}{(S_0 - S_{-1})\tau} \geq \bar{n}_S
\end{aligned}$$

erhält man durch Auflösen nach  $\bar{n}_S$

$$n_S^y - (n_S^k - n_S^y) \frac{E(\tilde{S}) - S_0(1 + r_f)}{(S_0 - S_{-1})\tau r_f} + ((n_S^k)^2 - (n_S^y)^2) \frac{\frac{c}{b} \text{Var}(\tilde{S}) (1 - \tau)}{(S_0 - S_{-1})\tau r_f} \leq \bar{n}_S.$$

Nutzt man die Informationen aus Gleichungen (17) und (18)

$$n_S^k - n_S^v = \frac{-r_f \tau (S_0 - S_{-1})}{2 \frac{c}{b} \text{Var}(\tilde{S})(1 - \tau)}$$

$$(n_S^k)^2 - (n_S^v)^2 = \frac{-r_f \tau (S_0 - S_{-1}) \cdot (2(E(\tilde{S}) - S_0(1 + r_f)) + r_f \tau (S_0 - S_{-1}))}{(2 \frac{c}{b} \text{Var}(\tilde{S})(1 - \tau))^2}$$

und substituiert, resultiert schließlich die Bedingung

$$n_S^v + \underbrace{\frac{E(\tilde{S}) - S_0(1 + r_f)}{2 \frac{c}{b} \text{Var}(\tilde{S})(1 - \tau)}}_{=n_S^k} - \underbrace{\frac{2(E(\tilde{S}) - S_0(1 + r_f)) + r_f \tau (S_0 - S_{-1})}{2 \cdot 2 \frac{c}{b} \text{Var}(\tilde{S})(1 - \tau)}}_{=\frac{1}{2}(n_S^k + n_S^v)} \leq \bar{n}_S.$$

Das war zu zeigen.

## A2. OPTIMALE NACHFRAGE NACH RISKANTEN WERTPAPIEREN

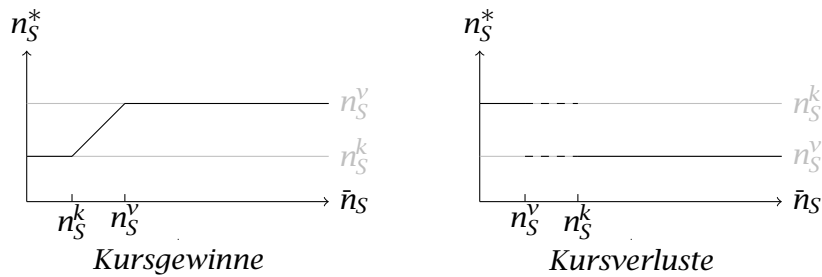


Abbildung 5: Nachfrageverhalten in Abhängigkeit von der Anfangsausstattung

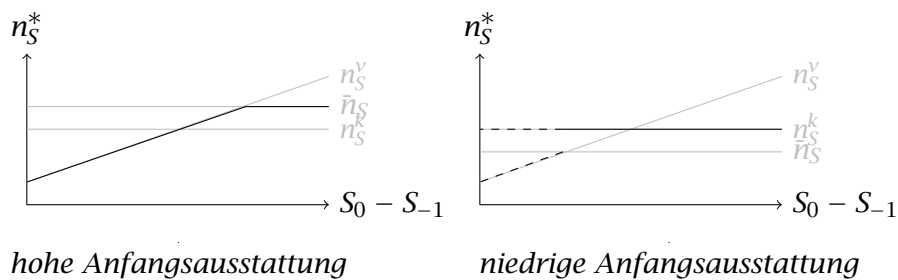


Abbildung 6: Nachfrageverhalten in Abhängigkeit von der Kursentwicklung

**Diskussionsbeiträge  
des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaft  
der Freien Universität Berlin**

**2009**

- 2009/1      ENGLER, Philipp  
Global Rebalancing in a Three-Country Model  
*Volkswirtschaftliche Reihe*
- 2009/2      MUCHLINSKI, Elke  
Is there a need for a coded language in central banking?  
*Volkswirtschaftliche Reihe*
- 2009/3      EICHFELDER, Sebastian  
Tax compliance costs  
*Volkswirtschaftliche Reihe*
- 2009/4      SALIM, Claudia  
Optional linear input prices in vertical relations  
*Volkswirtschaftliche Reihe*
- 2009/5      BUSCH, Ulrike / Dieter NAUTZ  
Controllability and Persistence of Money Market Rates along the Yield Curve  
*Volkswirtschaftliche Reihe*
- 2009/6      BÖNKE, Timm / Carsten SCHRÖDER  
The German spatial poverty divide  
*Volkswirtschaftliche Reihe*
- 2009/7      BESTER, Helmut  
Investments and the Holdup Problem in a Matching Market  
*Economics*
- 2009/8      MELLER, Barbara / Dieter NAUTZ  
The Impact of the European Monetary Union on Inflation Persistence in the Euro Area  
*Economics*
- 2009/9      KREMER, Stephanie / Alexander BICK / Dieter NAUTZ  
Inflation and Growth  
*Economics*
- 2009/10     SCHÖB, Ronnie  
Climate Policy  
*Economics*
- 2009/11     KEREKES, Monika  
Growth Miracles and Failures in a Markov Switching Classification Model of Growth  
*Economics*
- 2009/12     KNABE, Andreas / Steffen RÄTZEL  
Income, happiness, and the disutility of labor  
*Economics*
- 2009/13     KNABE, Andreas / Steffen RÄTZEL / Ronnie SCHÖB / Joachim WEIMANN  
Dissatisfied with life, but having a good day  
*Economics*



- 2009/14 ROCHA-AKIS, Silvia / Ronnie SCHÖB  
Welfare policy in the presence of unionised labour and internationally mobile firms  
*Economics*
- 2009/15 KRUSCHWITZ, Lutz  
Zum Problem der Anschlussverzinsung  
FACTS
- 2009/16 KNABE, Andreas / Steffen RÄTZEL / Stephan THOMSEN  
Right-Wing Extremism and the Well-Being of Immigrants  
*Economics*
- 2009/17 LORENZ, Daniela  
Portfolioauswahl bei Besteuerung realisierter Kursänderungen  
FACTS