

Berninghaus, Siegfried

Working Paper

Aktivitätsdispersionen und myopisches Verhalten

Diskussionsbeiträge - Serie A, No. 139

Provided in Cooperation with:

Department of Economics, University of Konstanz

Suggested Citation: Berninghaus, Siegfried (1980) : Aktivitätsdispersionen und myopisches Verhalten, Diskussionsbeiträge - Serie A, No. 139, Universität Konstanz, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/78188>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

FAKULTÄT FÜR
WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN UND STATISTIK
UNIVERSITÄT KONSTANZ

Aktivitätsdispersionen und
myopisches Verhalten

S. | Berninghaus

Serie A - Nr. 139

DISKUSSIONSBEITRÄGE

D-7750 Konstanz
Postfach 5560

Serie A

Volkswirtschaftliche Beiträge

Nr. 139

Aktivitätsdispersionen und
myopisches Verhalten

S. [Berninghaus

Serie A - Nr. 139

Ag 3360 80
Wirtschaftswissenschaften
K-11

Mai 1980

C 97039

Einleitung

In einer 1974 erschienenen Arbeit über das "Two-Armed Bandit"-Paradigma hat M. ROTHSCHILD auf die Anwendbarkeit eines klassischen Instrumentes der mathematischen Statistik auf das ökonomische Problem des "Anbieterverhaltens bei unsicherer Nachfrage" hingewiesen [6]. In der ökonomischen Theorie wurde das Problem bislang so angegangen, daß man die Unkenntnis des Anbieters über nachgefragte Mengen ersetzt hat durch die Kenntnis einer Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Nachfrage (s. etwa [2]). Dann kann z.B. die Verhaltensregel des Anbieters für die optimale Preisgestaltung bei unsicherer Nachfrage wie folgt formuliert werden: Setze den Preis so, daß der erwartete Gewinn (Erwartungswert wird mit der bekannten Verteilung der Nachfrage gebildet) maximiert wird. Diese Behandlung des Problems kann aus zwei Gründen nicht befriedigen: Zum einen kennt der Anbieter die Verteilung der Nachfrage nicht, er besitzt höchstens a priori-Hypothesen über die Form möglicher Verteilungen, zum anderen ist ihm i.d.R. die Möglichkeit gegeben, durch Erfahrung zu lernen. So müßte beispielsweise das optimale Preissetzungsverhalten des Anbieters als Lernprozeß konzipiert werden, bei dem auf jeder Stufe "Kosten" in Form entgegenger Gewinne durch falsche Preissetzungen anfallen.

Diese Situation ist charakteristisch für das "Two-Armed Bandit"-Problem: Ein Spieler hat die Möglichkeit, nebeneinander zwei verschiedene Spiele durchzuführen (z.B. an zwei verschiedenen "einarmigen Banditen" zu spielen), deren Erfolgswahrscheinlichkeit ihm nicht bekannt ist. Das Problem besteht für den Spieler nun darin, diejenige Reihenfolge der Spiele zu finden, bei der die diskontierte Summe seiner Spiel-Gewinne möglichst groß wird. Dabei besteht für den Spieler auf jeder Stufe die Möglichkeit, seine Erfahrungen auszuwerten und eine neue Einschätzung der Erfolgswahrscheinlichkeiten vorzunehmen.

Offenbar ist durch diese Beschreibung einer Spielsituation auch das Problem des Anbieters unter unsicherer Nachfrage hinreichend gut beschrieben, wenn man an die Stelle der Auswahl zwischen zwei "einarmigen Banditen" die Auswahl zwischen zwei Preisen setzt¹⁾. ROTHSCCHILD hat gezeigt, daß auch auf einem Markt mit "identischen" Anbietern Preisdispersionen erklärbar sind, sofern alle Anbieter eine optimale Preispolitik im Rahmen eines Lernprozesses à la "Two-Armed Bandit" wählen.

Die Möglichkeit, mit Hilfe dieses Paradigmas Dispersionen in anderen Aktivitäten als in der Preispolitik von "im wesentlichen" identischen Anbietern zu erklären, soll im vorliegenden Beitrag systematisch untersucht werden. Im folgenden wird eine einfache Entscheidungssituation bei unvollständiger Information dargestellt, die mit Hilfe einer vereinfachten Version des "Two-Armed Bandit" analysiert wird: Im Gegensatz zu dem allgemeinen, von ROTHSCCHILD benutzten Ansatz werden nur endlich viele Versuche zugelassen ("endlicher Planungshorizont"), und es wird angenommen, daß die Erfolgswahrscheinlichkeit eines Spieles bekannt ist, während über die Erfolgswahrscheinlichkeit des anderen Spieles weiterhin nur eine a priori Wahrscheinlichkeit besteht. Diese auf den ersten Blick spezielle Annahme ist für viele ökonomische Probleme plausibel: In diesen Situationen ist dem Anbieter durch Erfahrung die Gewinnwahrscheinlichkeit einer Aktivität bekannt; wird ihm nun aber die Möglichkeit geboten, eine neue Aktivität mit unbekannter Erfolgswahrscheinlichkeit zu "betreiben", dann befindet er sich exakt in der Situation des Spielers, wie sie oben beschrieben wurde.

Um das Modell zu spezialisieren, werden im folgenden zwei Arten von Aktivitäten untersucht. Einmal besteht die "neue Aktivität" in der Einführung eines neuen Produktes, dessen Qualität sich gegenüber dem "älteren Modell" wesentlich geändert hat, im zweiten Fall besteht sie in der Substitution eines Produktes mit bekannter

Qualität durch ein Produkt mit (kaum wahrnehmbarer) Qualitätsverschlechterung. Mit Hilfe des "Two-Armed Bandit" Paradigmas ist es dann möglich, Qualitäts- und Produkt-Innovations-Dispersionen auf Märkten mit "fast identischen" Anbietern zu erklären bzw. von der "Myopie" des Angebotsverhaltens, die sich hier in der gewählten Länge der Planungsperiode ausdrückt, abhängig zu machen.

I. Das formale Modell

Zuerst wird das hier verwendete formale Modell des "Two-Armed Bandit" in der Terminologie der Glücksspiele formuliert, um einen einheitlichen Rahmen für die Anwendungsmöglichkeiten zu schaffen:

Ein Spieler kann insgesamt N mal ($N < \infty$) zwischen zwei Spielen wählen, jedes Spiel ist ein Binomialexperiment, wobei die Erfolgswahrscheinlichkeiten π_1 von Spiel 1 und π_2 von Spiel 2 unbekannt sind. Der Wahrscheinlichkeitsraum des gesamten N -stufigen Spieles ist (Ω, \mathbb{B}, P) , wobei

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 ,$$

$$\Omega_i = S^N, \quad S = \{0,1\}, \quad i \in \{1,2\} ,$$

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2 \quad \text{die von den meßbaren Rechtecken erzeugte Produktalgebra,}$$

$$\mathbb{B}_i = \bigotimes_{n=1}^N \mathbb{B}_{i,n} \quad (\text{mit } \mathbb{B}_{i,n} \equiv \text{Potenzmenge über } S),$$

$$P = P_{\pi_1} \otimes P_{\pi_2} \quad \text{das Produktmaß aus } P_{\pi_i} \text{ und}$$

$$P_{\pi_i} = \bigotimes_{n=1}^N \pi_i \quad \text{das aus den "wahren" Erfolgswahrscheinlichkeiten konstruierte Produktmaß über } \mathbb{B}_i \text{ ist.}$$

Die Gewinne der beiden Spiele, die jeweils unabhängig voneinander und identisch verteilt sind, werden durch zwei

Folgen von Zufallsvariablen repräsentiert

$$\{X_{1n}\}_{n=1}^N, \quad \{X_{2n}\}_{n=1}^N$$

$$X_{in} : \Omega \rightarrow S, \quad \text{wobei}$$

$$X_{in}(\omega) := \tilde{X}_{in}(\omega_i) = \text{proj}_n(\omega_i). \quad 2)$$

Die Information, die der Spieler auf der Stufe n besitzt, wird durch die σ -Algebra $\mathbb{F}_n \subset \mathbb{B}$ beschrieben (\mathbb{F}_n wird durch die meßbaren Zylindermengen in \mathbb{B} mit n -dimensionaler Basis erzeugt). Es wird $\mathbb{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ festgesetzt. Die Politik des Spielers, d.h. die Wahl eines Spiels auf jeder der N Stufen, wird dann durch eine Folge von \mathbb{F}_{n-1} -meßbaren Funktionen $\{\sigma_n\}_{n=1}^N$

$$\sigma_n : \Omega \rightarrow \{1, 2\}$$

beschrieben. Damit ist festgelegt: Die Wahl eines Spiels auf der n -ten Stufe hängt von der bisher angesammelten Information ab (für $n \geq 2$).

Ferner wird angenommen, daß der Spieler die Erfolgswahrscheinlichkeiten π_i ($i=1,2$) nicht kennt, er besitzt aber eine a priori Verteilung ξ über die Parameter π_i . Damit ist es möglich, den Informationsstand des Spielers auf der n -ten Stufe mit seiner a posteriori-Wahrscheinlichkeit $\xi(X_{i_1,1}, \dots, X_{i_n,n})$ über die Parameter zu identifizieren, wobei $(X_{i_1,1}, \dots, X_{i_n,n})$ ein realisiertes Stichprobenergebnis nach n Versuchen mit X_1 ($i_j=1$) und X_2 ($i_j=2$) bezeichnet. Nach dem Satz von Bayes erhält man

$$\xi(X_{i_1,1}, \dots, X_{i_n,n}) = \frac{\pi_1^{n_1} (1-\pi_1)^{N_1-n_1} \pi_2^{n_2} (1-\pi_2)^{N_2-n_2} d\xi}{\int_{[0,1] \times [0,1]} \pi_1^{n_1} (1-\pi_1)^{N_1-n_1} \pi_2^{n_2} (1-\pi_2)^{N_2-n_2} d\xi}$$

wobei N_i die Zahl der Versuche mit Spiel i , n_i die Anzahl der Erfolge (" $X_i = 1$ ") mit Spiel i bezeichnet. Das Ziel des Spielers besteht nun darin, eine Politik $\{\sigma_n^*\}_{n=1}^N$ zu finden, die die Summe der erwarteten Gewinne

$$\sum_{n=1}^N E(X_{\sigma_n, n})$$

maximiert.

Bei der Ableitung der optimalen Politik geht man mit Hilfe der folgenden rekursiven Beziehungen vor: Bezeichne $V^m(\xi)$ den maximalen erwarteten Gewinn, wenn noch m -mal gespielt wird und der Informationsstand auf der $(N-m)$ -ten Stufe durch ξ repräsentiert wird. Dann gilt

$$V^m(\xi) = \max_{i \in \{1,2\}} W_i^m(\xi)$$

$$W_i^m(\xi) = E_\xi(X_i) + E_\xi V^{m-1}(\xi(X_i)) ,$$

wobei $V^0(\xi) \equiv 0$

gesetzt wird. Offenbar kann man für $W_i^m(\xi)$ schreiben

$$W_i^m(\xi) = E_\xi(\Pi_i) + E_\xi(\Pi_i) V^{m-1}(\xi_i(1)) + (1-E_\xi(\Pi_i)) V^{m-1}(\xi_i(0))$$

mit $E_\xi(\Pi_i) = \int_0^1 \Pi_i d\xi$,

wobei $\xi(X_i)$ die a posteriori-Verteilung von Π_i nach erfolgtem Versuch mit dem Spiel i auf der $(N-m)$ -ten Stufe und $\xi_i(1)$ die

a posteriori-Verteilung nach Vorliegen des Ergebnisses "X₁=1" bezeichnet. $W_i^m(\xi)$ bezeichnet dann den erwarteten Ertrag des Spiels i auf der (N-m)-ten Stufe zusätzlich des erwarteten Ertrags bei "optimaler" Fortführung der Spiel-Auswahlen. Offenbar wird, sofern noch m Auswahlmöglichkeiten übrigbleiben, bei Vorliegen der Information ξ das Spiel i gewählt, wenn $W_i^m(\xi) > W_j^m(\xi)$,

$i \neq j (i, j \in \{1, 2\})$.

Im folgenden soll ein Spezialfall des "Two-armed bandit" diskutiert werden: Die Erfolgswahrscheinlichkeit von X₂ ist bekannt ($\pi_2 \in (0, 1)$), der Informationsstand eines Spielers bezieht sich dann allein auf die Verteilung von π_1 . Man kann zeigen³⁾, daß in diesem Fall die optimale Politik σ^* die Eigenschaft hat: Ist man einmal auf einer Stufe n* auf Spiel 2 übergegangen ($n^* \in \{1, \dots, N+1\}$, wobei $n^*=N+1$ bedeutet, daß man auf allen Stufen Spiel 1 gewählt hat), so wird man auf allen übrigen Stufen nicht mehr auf Spiel 1 zurückgehen, d.h. $\sigma_n^* = 2$ für $n \geq n^*$ bei Vorliegen der Information $F_{n^*-1} \in F_{n-1}$. Dies ist auch intuitiv einsichtig, da sich der Informationsstand des Spielers bzgl. π_1 nicht mehr ändert, wenn Spiel 2 gespielt wird.

Um zu ökonomisch interpretationsfähigen Aussagen zu kommen, soll die Problemstellung weiter spezialisiert werden: Die a priori Wahrscheinlichkeit (über π_1) hat die Form

$$\pi_1 = \bar{\pi} (> \pi_2)^4 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } \xi (\in (0, 1)).$$

$$\pi_1 = 0 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } (1 - \xi).$$

Damit ist die Struktur der optimalen Politik weiter festgelegt: Ist bis zu einer Stufe n* schon einmal das Ereignis "X₁=1" eingetreten, dann wird ausschließlich Spiel 1 gespielt werden. Ist dieses Ereignis dagegen auf den ersten (n*-1) Stufen noch nicht eingetreten, so wird man von Stufe n* ab auf Spiel 2 übergehen. Das heißt: Ist die Erfahrung mit Spiel 1 "schlecht genug", so wird man schließlich auf Spiel 2 übergehen.

Aufgrund der speziellen Struktur des Problems kann man den erwarteten Gewinn der optimalen Politik in Abhängigkeit von n^* und N wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} \Pi(1, N) &= N \cdot \Pi_2 \\ \Pi(n^*, N) &= \sum_{j=1}^{n^*-1} E\left(\sum_{n=1}^N X_{\bar{\sigma}_n, n} \mid A_j\right) P(A_j) + \\ &+ E\left(\sum_{n=1}^N X_{\bar{\sigma}_n, n} \mid B_{n^*-1}\right) P(B_{n^*-1}) \end{aligned}$$

für $n^* \in \{2, \dots, N+1\}$, wobei

$$A_j = \bigcap_{n=1}^{j-1} \{X_{1, n} = 0\} \cap \{X_{1, j} = 1\}$$

$$B_j = \bigcap_{n=1}^j \{X_{1, n} = 0\},$$

und $\bar{\sigma} = \{\bar{\sigma}_n\}_{n=1}^N$ bezeichne jeweils die oben beschriebene

Prozedur bei dem möglichen "Umsteigezeitpunkt" n^* .

Das Problem besteht für den Spieler darin, den "Umsteigezeitpunkt" n^* zu finden, der $\Pi(n, N)$ maximiert. Man kann zeigen, daß $(\Pi(n+1, N) - \Pi(n, N))$ eine abnehmende Funktion von n ist, folglich kann man n^* als kleinste Zahl $n \in \{1, \dots, N\}$ bestimmen, für die

$$\Pi(n+1, N) - \Pi(n, N) \leq 0$$

gilt. Für die ökonomische Interpretation interessant sind in erster Linie die beiden Grenzfälle, in denen es für einen Spieler optimal ist, ausschließlich Spiel 1 oder Spiel 2 zu spielen. Offenbar ist es für einen Spieler nur dann optimal, auf allen Stufen Spiel 2 zu spielen, wenn

$$(1a) \quad \Pi(2, N) - \Pi(1, N) \leq 0,$$

gilt dagegen

$$(1b) \quad \Pi(n+1, N) - \Pi(n, N) > 0$$

für alle $n = 1, \dots, N$, dann ist es optimal, auf allen Stufen ausschließlich Spiel 1 zu spielen. Für die folgenden Ausführungen ist allerdings festzuhalten, daß (1b) nur eine hinreichende Bedingung für die ausschließliche Wahl von Spiel 1 auf allen Stufen ist. Sollte sie verletzt sein, so ist es bei "hinreichend" guter Erfahrung mit Spiel dennoch möglich, daß auf allen Stufen Spiel 1 gewählt wird. Mit dem in Lemma 1 (Appendix a) gefundenen Ausdruck für (\dots) erhält man (1a) in der Form

$$(1a') \quad \xi \left[\frac{\bar{\pi}}{\pi_2} \left[1 + (N-1)\bar{\pi} + \pi_2^{N-1} \left(1 - \frac{1}{\bar{\pi}} \right) \right] - \pi_2 (1 - \xi) \right] \leq 0,$$

dies ist eine Bedingung an ξ , wie sofort aus der folgenden Umformulierung ersichtlich ist.

$$(1a'') \quad \xi \leq \frac{1}{\frac{\bar{\pi}}{\pi_2} \left[1 + (N-1)\bar{\pi} + \pi_2^{N-1} \left(1 - \frac{1}{\bar{\pi}} \right) \right] + 1}$$

Mit Hilfe von (1a'') kann man sofort einsehen, daß mit wachsender Länge der "Planungsperiode" N die Chance steigt, daß (bei festem ξ) die Bedingung (1a'') verletzt wird, d.h. wenigstens ein Versuch mit Spiel 1 gemacht wird. Eine zu (1b) äquivalente Bedingung ist offenbar

$$(1c) \quad \Pi(N+1, N) - \Pi(N, N) > 0,$$

durch Einsetzen des in Lemma 1 gefundenen Ausdrucks erhält man:

$$(1c') \quad \xi \left\{ \left[\bar{\pi} (1 - \bar{\pi})^{N-1} - \pi_2 \bar{\pi}^{N-1} \right] + \pi_2 \right\} > \pi_2 ;$$

durch Umformulierung

$$(1c'') \quad \xi > \frac{1}{\bar{\pi}^{N-1} \left[\frac{\bar{\pi}}{\bar{\pi}_2} \left(\frac{1-\bar{\pi}}{\bar{\pi}} \right)^{N-1} - 1 \right] + 1} .$$

Aus (1c'') ist die gleiche "Tendenz" abzuleiten wie aus (1a''): Mit wachsender Länge der Planungsperiode konvergiert die rechte Seite gegen 1, also steigt die Chance, daß Bedingung (1c'') verletzt wird. Die Wirkung "abnehmender Myopie" ist demnach asymmetrisch, die Chance überhaupt einmal Spiel 1 zu spielen steigt, dagegen sinkt die Chance, mit Sicherheit aus allen Stufen Spiel 1 zu spielen. Gilt allerdings $\bar{\pi} < (1-\bar{\pi})$, dann kann für kleines N die oben beschriebene Tendenz umgekehrt werden, dies kann allerdings nur für einen beschränkten Bereich von N gelten, der vom Verhältnis $\bar{\pi} / (1-\bar{\pi})$ abhängt.

II. Ökonomische Interpretation

Es ist in erster Linie das zuletzt abgeleitete Ergebnis, das das "Two armed bandit" - Paradigma für die Anwendung auf ökonomische Problemstellungen folgender Art interessant macht:

Ein Anbieter, der seit einiger Zeit ein Produkt gleicher Qualität angeboten hat, hat die Möglichkeit, das Produkt mit schlechterer Qualität anzubieten, wobei er nicht weiß, ob die Konsumenten die Qualitätsverschlechterung erkennen. Die Qualitätsverschlechterung soll im Modell durch eine Steigerung des Stückgewinns (und eine abnehmende Kaufwahrscheinlichkeit) dargestellt werden,

$P - C_1$... Stückgewinn der geringen Qualität

$P - C_2$... Stückgewinn der höheren Qualität,

P bezeichne hier den Preis des Produktes, C_i ($C_1 < C_2$) die Stückkosten. Der "Kauf - Prozess" wird dann analog dem Modell von M. Rothschild eingeführt: Die potentiellen Kunden betreten das Geschäft des Anbieters in gleichmäßigem Abstand, pro Periode fragt ein Kunde nach dem Produkt.⁵⁾ Nach Ansicht des Produktes entscheidet sich der Kunde, ob er kauft oder nicht. Die Kaufwahrscheinlichkeit für das alte Produkt ist bekannt ($= \pi_2$), die Kaufwahrscheinlichkeit für das modifizierte Produkt ist nicht bekannt, der Anbieter hat allerdings eine einfache a priori Hypothese über das Kaufverhalten:

Mit Wahrscheinlichkeit ξ wird das Produkt mit $\pi_1 = \bar{\pi} (< \pi_2)$ angenommen mit $(1 - \xi)$ wird das Produkt von den Käufern gar nicht angenommen, d.h. $\pi_1 = 0$. Damit das Problem der Qualitätswahl nicht trivial wird, nimmt man

$$\bar{\pi}(P - C_1) > \pi_2 (P - C_2)$$

an. Die Aufgabe besteht nun darin, mit Hilfe der im letzten

Abschnitt dargestellten Beziehungen Bedingungen zu finden, die es vorteilhaft erscheinen lassen, das Produkt schlechterer Qualität einzuführen.

Die Grundstruktur dieses Problems läßt weitere ökonomische Interpretationen zu. So wird man ebenso das Problem der Einführung eines neuen Produktes bei unsicherer Nachfrage behandeln können, sofern es sich um die Einführung eines "völlig neuen" Produktes handelt. In der Regel wird man in diesem Fall annehmen, daß

$$(P - C_1) > (P - C_2)$$

wobei $(P - C_1)$ den Stückgewinn des neuen Produktes $(P - C_2)$ den Stückgewinn des alten angibt. Die Hypothese über die Kaufwahrscheinlichkeit wird mit

$$\pi_1 = \bar{\pi} \leq \pi_2$$

angenommen derart, daß

$$\bar{\pi}(P - C_1) > \pi_2(P - C_2),$$

die Gegenhypothese lautet wie im vorhergehenden Fall

$$\pi_1 = 0 \text{ (mit Wahrscheinlichkeit } (1 - \xi) \text{)}.$$

Eine Strategie, mit der der Anbieter einer möglichen Senkung der Kaufwahrscheinlichkeit zuvorkommen möchte, besteht in einer Preissenkung $(P' < P)$ für das neue Produkt, es wird in diesem Fall

$$\pi_1 = \bar{\pi} \geq \pi_2 \text{ mit } (P' - C_1) < (P - C_2), \text{ aber}$$

$$\bar{\pi}(P' - C_1) > \pi_2(P - C_2).$$

angenommen, um das Problem für den Anbieter nicht trivial werden zu lassen.

Formal kann man die beschriebenen, ökonomischen Problemstellungen auf das im letzten Abschnitt behandelte Auswahlproblem des Spielers reduzieren, wobei

$$X_i = \begin{cases} G_i \\ 0 \end{cases} \quad (G_i \text{ "Gewinn" bei Spiel } i)$$

eine binominal-verteilte Zufallsvariable ist; die Erfolgswahrscheinlichkeit von X_2 ist bekannt (π_2), über die Erfolgswahrscheinlichkeit von X_1 besteht die a priori Hypothese $\pi_1 = \bar{\pi}$ mit Wahrscheinlichkeit ξ und $\pi_1 = 0$ mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \xi)$. Da in allen oben angeführten Fällen

$\bar{\pi} G_1 > \pi_2 G_2$ angenommen wird, kann man ξ interpretieren als Wahrscheinlichkeit dafür, daß Spiel 1 vorteilhafter als Spiel 2 ist.

Damit erhält man durch direkte Anwendung der Ausführungen von Teil I mit Hilfe von Lemma 1 (Anhang a)) die folgende Form der Bedingung (1a").

$$(2a) \xi \leq \frac{1}{\frac{\bar{\pi}}{\pi} \left[\frac{G_1}{G_2} (1 + (N-1)\bar{\pi}) + \pi_2 N \left(1 - \frac{1}{N} - \frac{1}{\bar{\pi}}\right) + 1 \right]}$$

Nimmt man $\bar{\pi}$ und π_2 als konstant an, dann hängt die Entscheidung, ob wenigstens einmal "Spiel" 1 gewählt wird von der Länge der Planungsperiode N und dem Gewinnverhältnis $\frac{G_1}{G_2}$ der beiden "Spiele" ab. Für

$$\bar{\pi} = \frac{1}{2}, \quad \pi_2 = \frac{1}{4}$$

erhält man z.B. den Verlauf des "kritischen Bereichs" für ξ aus Abbildung 1.

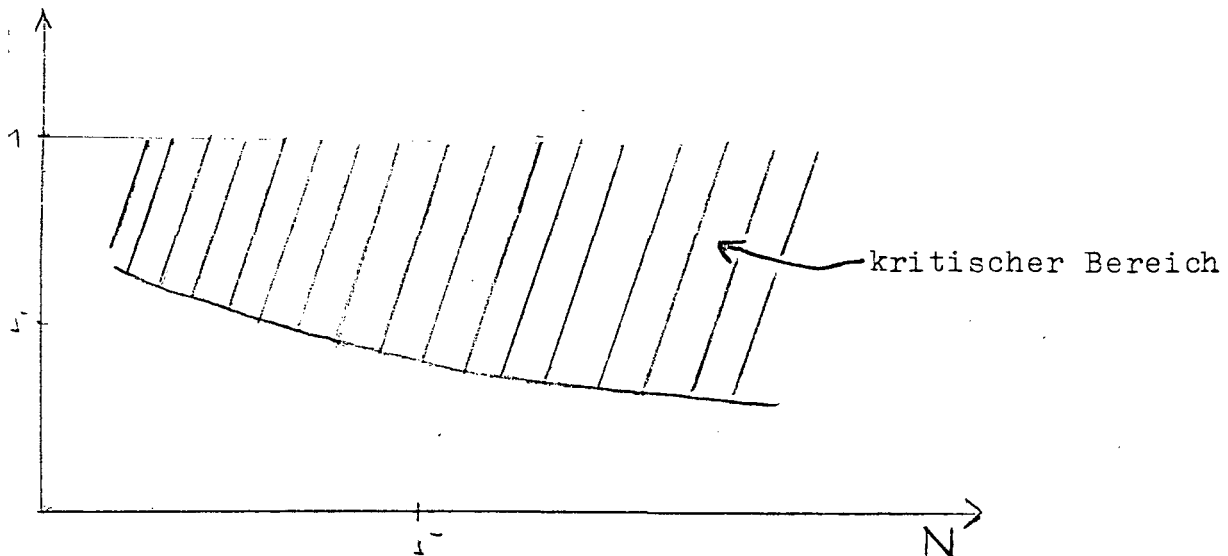


Abb 1: Bedingung (2a) für $\overline{\pi} = \frac{1}{2}$, $\overline{\pi}_2 = \frac{1}{4}$ und

$$\frac{G_1}{G_2} = 0,75$$

Nimmt man an, daß alle Anbieter identisch sind in dem Sinne, daß sie 1) das gleiche Gewinnverhältnis $\frac{G_1}{G_2}$ aufweisen,

2) die gleiche a priori Wahrscheinlichkeit ξ über $\overline{\pi}_1$ haben, 3) das gleiche Risikoverhalten (in diesem Fall: Risikoneutralität) zeigen, dann wird die Bereitschaft der Anbieter, das neue Produkt einzuführen mit der Länge der Planungsperiode wachsen. Demnach wird "myopisches Verhalten" die Innovationsbereitschaft der Anbieter sinken lassen.

Außerdem kann man schließen, daß auch auf einem Markt mit - im oben genannten Sinne - identischen Anbietern eine

"Qualitätsdispersion" wenigstens für eine Periode bestehen wird, sofern die Anbieter hinreichend verschiedene Grade "myopischen Verhaltens" aufweisen.

Um die Frage nach der Dauer der Dispersion zu beantworten, muß die Bedingung (1c) für den hier betrachteten Fall umformuliert werden, sodaß man erhält

$$(2b) \quad \xi > \frac{1}{\bar{\pi}^{N-1} \left[\left(\frac{1-\bar{\pi}}{\bar{\pi}} \right)^{N-1} \frac{G_1}{G_2} \frac{\bar{\pi}}{\bar{\pi}_2} - 1 \right] + 1} .$$

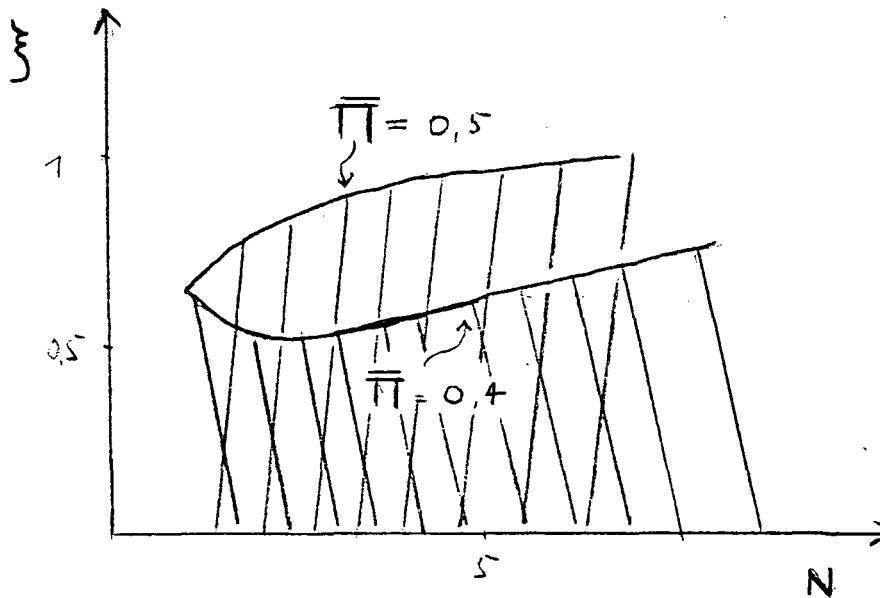


Abb. 2: Bedingung (2b) für $\bar{\pi}_2 = 0,25(0,2)$,

$$\bar{\pi} = 0,5(0,4) \text{ und } \frac{G_1}{G_2} = 0,75$$

Abb. 2 zeigt für $\frac{G_1}{G_2} = 0,75$ und zwei verschiedene $\overline{\Pi}$ mit gleichem Verhältnis $\frac{\overline{\Pi}}{\overline{\Pi}_2}$ die Abhängigkeit des kritischen Bereichs von ξ (gemäß Bedingung (2b)) von der Länge der Planungsperiode N . Wie schon im Teil I erwähnt sind hier zwei Reaktionen denkbar, bei kleinen N kann bei Zunahme von N der "kritische Bereich" für wachsen oder abnehmen, bei großen N schließlich ist nur noch ein Anwachsen des kritischen Bereichs festzustellen.

Bei der Interpretation von (2a) muß man allerdings beachten, daß sie nur eine hinreichende Bedingung für die ausschließliche Wahl der "unsicheren" Aktivität darstellt. Man kann also höchstens behaupten, daß bei Verletzung der Bedingung (2a) nicht mit Sicherheit ausschließlich die erste Aktivität betrieben wird; es hängt dann von der Erfahrung ab, die der Anbieter auf jeder Stufe macht, ob er nicht auf Aktivität 2 übergeht. Geht man davon aus, daß nicht alle Erfahrungen im Laufe des Suchprozesses mit der ersten Aktivität so gut sind, daß sie ausschließlich (auch bei Verletzung von (2a)) durchgeführt wird, dann kann man im Sinne dieser Ausführungen dennoch davon sprechen, daß bei Verletzung von Bedingung (2a) die erste Aktivität "tendenziell weniger" auf allen Stufen durchgeführt wird. Zusammenfassend kann man demnach festhalten:

Unterschiedliche Grade der Myopie im Anbieterverhalten erzeugen Qualitätsdispersionen auch bei gleicher Einschätzung der Erfolgswahrscheinlichkeit ξ . Dabei wird bei "kleinem" ξ , d.h. pessimistischer Einschätzung der Erfolgswahrscheinlichkeit der ersten Aktivität die Dispersion von der Form sein, daß einige Anbieter (die myopischen) ausschließlich Aktivität 2 betreiben, d.h. die alte Qualität weiter anbieten, während die übrigen wenigstens in den ersten Perioden mit der neuen Qualität experimentieren. Bei optimistischer Einschätzung, also

bei "großem" § wird man die Dispersion dadurch charakterisieren können, daß die myopischen Anbieter ausschließlich die neue Qualität anbieten, während die übrigen diese Entscheidung von ihrer Erfahrung mit der neuen Qualität abhängig machen.

III. Eine Verallgemeinerung des Modells:

Im letzten Abschnitt ist die beschränkte Anwendbarkeit des Modells auf Probleme der "Qualitäts - Innovation" sichtbar geworden: In allen Fällen wird die "Gegenhypothese" gegen die Hypothese " $\prod_1 = \bar{\prod} > 0$ " in der Form " $\prod_1 = 0$ " angenommen. Es ist wünschenswert, das im letzten Abschnitt entwickelte Modell auf den Fass auszudehnen, in dem beliebige a priori Wahrscheinlichkeitsverteilungen über \prod_1 zugelassen sind. So ist beispielweise eine Qualitätsänderung im Sinne der "Marken - Pflege", bei der nur minimale Qualitätsänderungen des Produktes vorgenommen werden, und bei der folglich nur geringe Änderungen der Kaufwahrscheinlichkeiten zu erwarten sind, durch das vorhergehende Modell nicht zu erfassen.

Vom formalen Standpunkt aus ist eine interpretationsfähige Bedingung für den optimalen Übergang von Spiel 1 auf Spiel 2 leider nur bei restriktiven Annahmen an die a priori Verteilung möglich. Die vereinfachende Annahme im hier dargestellten Modell besteht darin, daß man bei Auftreten von " $X_1 = 1$ " bereits " $\prod_1 = 0$ " ausschließen kann. Der allgemeine Fall beliebiger a priori Verteilungen wurde zuerst von Bradt, Karlin Johnson [4] behandelt (siehe auch [2]). Sie beweisen die Existenz einer Größe $Q(m, \xi)$, die von der a priori Verteilung ξ und der Anzahl m der noch verbleibenden Stufen abhängt mit der Eigenschaft, daß auf Stufe $(N - m^* + 1)$ genau dann auf Spiel 2 übergegangen werden soll, wenn $Q(m^*, \xi) < \prod_2$ (siehe [4], S. 1069). Um zu ökonomisch interpretierbaren Aussagen zu kommen, wird im folgenden für $Q(.,.)$ eine Approximation verwendet, die für Verteilungen ξ mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = \infty, \quad (\mu_i = \int_0^1 \prod_1^i d\{ \})$$

sinnvoll ist. Für a priori Verteilungen mit dieser Eigenschaft gilt dann

$$(3) \quad Q(m, \{ \}) \approx \frac{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m}{1 + \mu_1 + \dots + \mu_{m-1}}$$

(siehe [4], S. 1073). Ein Beispiel für eine Klasse von Verteilungen, die die Voraussetzung für eine sinnvolle Approximation erfüllen ist im Appendix angegeben (Appendix b), Lemma 2)⁶⁾. Demnach erhält man eine der Bedingung (1a'') analoge Bedingung in der Form

$$(4a) \quad \frac{\mu_1 + \dots + \mu_N}{1 + \dots + \mu_{N-1}} < \prod_2,$$

d.h.

$$(4a') \quad (1 - \prod_2)(\mu_1 + \dots + \mu_{N-1}) + \mu_N < \prod_2,$$

diese Bedingung kann offenbar wie (1a'') interpretiert werden: Bei gegebener a priori Verteilung steigt die "Chance", daß Bedingung (4a') verletzt wird, d.h. daß wenigstens einmal mit Spiel 1 gespielt wird, mit steigendem N.

Um eine der Bedingung (1c'') analoge Bedingung dafür zu

erhalten, daß Spiel 1 auf allen Stufen gespielt wird, nützt man die einfache Struktur des Problems aus: Offenbar kann dann und nur dann (bei optimaler Politik) auf allen Stufen Spiel 1 gewählt werden, wenn Spiel 1 auf der letzten Stufe gewählt wird. Das ist äquivalent damit, daß

$$(4b) \quad \int_0^1 \pi_1 \, d\xi^{N-1} \geq \pi_2$$

für alle a posteriori Verteilungen ξ^{N-1} , wobei alle Erfahrungen auf den $(N - 1)$ Stufen mit Spiel 1 gemacht wurden. Um zu interpretationsfähigen Aussagen zu kommen, nimmt man für ξ eine β -Verteilung mit den Parametern $\alpha, \beta > 0$ an. Da die β -Verteilungen für Binominal - Experimente eine konjugierte Familie von Verteilungen bilden [5, Chap. 9], sind alle a posteriori Verteilungen ξ^{N-1} durch die Parameter

$$(\alpha + n, \beta + N-1-n) \text{ für } n \in \{0, \dots, N-1\}$$

charakterisiert (wobei "n" die Anzahl der Stufen angibt, auf denen " $X_1 = 1$ " eingetroffen ist). Damit wird Bedingung (4b) zu

$$(4b') \quad \frac{\alpha + n}{\alpha + \beta + N - 1} \geq \pi_2 \text{ für } n \in \{0, 1, \dots, N-1\} .$$

Aus (4b') ist sofort ersichtlich, daß bei wachsendem N die "Chance" steigt, daß die Bedingung verletzt wird

und demnach nicht garantiert werden kann, daß auf allen Stufen Spiel 1 gespielt wird.

Die Ableitungen zeigen, daß auch in allgemeineren als den im letzten Abschnitt angegebenen Fall die dort beschriebene Abhängigkeit der Aktivitätsdispersionen von der Länge der Planungsperiode aufrechterhalten werden kann.

Appendix

a) $\Pi(n, N)$ sei definiert wie im Text,

Lemma 1: Es gilt

$$\Pi(n, N) = \xi \bar{\Pi} \left[\sum_{i=1}^{n-1} (1 + (N - j) \bar{\Pi}) (1 - \bar{\Pi})^{j-1} \right] +$$

$$+ (N - (n-1)) \Pi_2 (\xi \bar{\Pi}^{n-1} + (1 - \xi)),$$

und

$$\Pi(n+1, N) - \Pi(n, N) = \xi \bar{\Pi} \left[(1 - \bar{\Pi})^{(n-1)} + \right.$$

$$\left. + (N-n) \bar{\Pi} (1 - \bar{\Pi})^{n-1} + \Pi_2 \bar{\Pi}^{n-1} (N - (n-1)) \right] \times$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{N - (n-1)} - \frac{1}{\bar{\Pi}} \right) - \Pi_2 (1 - \xi).$$

Beweis: Offensichtliche Verallgemeinerung des Beweises von M. de Groot (S. 397 - 398) für beliebige Π_1, Π_2 .

b)

Lemma 2: Ist ξ eine β -Verteilung mit

(i) $\alpha + \beta \leq 1$

(ii) $0 \leq \beta \leq 1$,

dann gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = \infty$$

$$(\mu_i = \int_0^1 \Pi_1^i d\xi).$$

Beweis: offenbar gilt

$$\mu_i = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+i-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\dots(\alpha+\beta+i-1)},$$

betrachte man die Folge $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$, wobei

$$m_i := i\mu_i.$$

Es ist $m_i > 0$ und

$$m_i - m_{i-1} = i(\mu_i - \mu_{i-1}) + \mu_{i-1} = \frac{i - \beta(\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+i-2))}{(\alpha+\beta)\dots(\alpha+\beta+i-1)}$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+i-2)(\alpha+\beta+i-1)}{(\alpha+\beta)\dots(\alpha+\beta+i-1)} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+i-2)[\alpha+\beta+i(1-\beta)-1]}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\dots(\alpha+\beta+i-1)} > 0$$

Dann gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} m_i = A \neq 0$ ($A = \infty$ ist möglich). Daher

$$\text{gilt } \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = \infty.$$

Anmerkungen:

- 1) Eine Verallgemeinerung des "Two Armed bandit" auf ein "n - Armed" ist leicht durchzuführen.
- 2) $\text{proj}_n (\omega_i)$ bezeichnet die Projektion des N - tupels $\omega_i = (\omega_i^1, \dots, \omega_i^N)$ auf die n - te Koordinate.
- 3) Zum Beweis siehe (4) , S. 1068.
- 4) Bei $\overline{\pi} < \pi_2$ ist die Lösung des Problems offenbar trivial: Man wählt auf jeder Stufe Spiel 2.
- 5) Dieses vereinfachte Modell des Kaufprozesses kann verallgemeinert werden (siehe [1]), dies würde aber die darzustellenden, ökonomischen Zusammenhänge hier nur unnötig verschleiern.
- 6) Für eine β - Verteilung mit $\alpha = \beta = 1$ gilt die Approximation (3) für $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ sogar exakt ([4], S. 1073).

Literaturverzeichnis

[1] Ackermann, N.

Preisbildung bei unbekannter Nachfragefunktion und das Problem des zweiarmigen Banditen, Dissertation, Bonn (1978)

[2] Baron, D.P.

Price uncertainty, utility and industry equilibrium in pure competition

International Economic Review 11 (1970), 463 - 480

[3] Bellman, R.

A Problem in the sequential Design of Experiments

Sankhya 16 (1956), 221 - 229

[4] Bradt, R.N., Johnson, S.M., Karlin, S.

On Sequential Designs for Maximizing the Sum of n Observations,

The Annals of Mathematical Statistics, 27 (1956), 1068 - 1074

[5] De Groot, M. H.

Optimal Statistical Decisions, Mac Graw Hill, New York (1970)

[6] Rothschild, M.

A Two - Armed Bandit Theory of Market Pricing, Journal of Economic Theory, 9 (1974), 185 - 202