

Hausenblas, Václav; Švarc, Petr

Working Paper

Evoluční dynamika vězňova dilematu: Vliv topologie interakcí a imitace na vývoj kooperativního chování

IES Working Paper, No. 30/2008

Provided in Cooperation with:

Charles University, Institute of Economic Studies (IES)

Suggested Citation: Hausenblas, Václav; Švarc, Petr (2008) : Evoluční dynamika vězňova dilematu: Vliv topologie interakcí a imitace na vývoj kooperativního chování, IES Working Paper, No. 30/2008, Charles University in Prague, Institute of Economic Studies (IES), Prague

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/83387>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

Institute of Economic Studies, Faculty of Social Sciences
Charles University in Prague

**Evoluční dynamika vězňova
dilematu:
Vliv topologie interakcí a
imitace na vývoj
kooperativního chování**

Václav Hausenblas
Petr Švarc

IES Working Paper: 30/2008



Institute of Economic Studies,
Faculty of Social Sciences,
Charles University in Prague

[UK FSV – IES]

Opletalova 26
CZ-110 00, Prague
E-mail : ies@fsv.cuni.cz
<http://ies.fsv.cuni.cz>

Institut ekonomických studií
Fakulta sociálních věd
Univerzita Karlova v Praze

Opletalova 26
110 00 Praha 1

E-mail : ies@fsv.cuni.cz
<http://ies.fsv.cuni.cz>

Disclaimer: The IES Working Papers is an online paper series for works by the faculty and students of the Institute of Economic Studies, Faculty of Social Sciences, Charles University in Prague, Czech Republic. The papers are peer reviewed, but they are *not* edited or formatted by the editors. The views expressed in documents served by this site do not reflect the views of the IES or any other Charles University Department. They are the sole property of the respective authors. Additional info at: ies@fsv.cuni.cz

Copyright Notice: Although all documents published by the IES are provided without charge, they are licensed for personal, academic or educational use. All rights are reserved by the authors.

Citations: All references to documents served by this site must be appropriately cited.

Bibliographic information:

Hausenblas, V., Švarc, P. (2008). “Evoluční dynamika vězňova dilematu: Vliv topologie interakcí a imitace na vývoj kooperativního chování” IES Working Paper 30/2008. IES FSV. Charles University.

This paper can be downloaded at: <http://ies.fsv.cuni.cz>

Evoluční dynamika vězňova dilematu: Vliv topologie interakcí a imitace na vývoj kooperativního chování

Václav Hausenblas*
Petr Švarc#

*IES, Charles University Prague,
E-mail: vencahaus@seznam.cz

IES, Charles University Prague,
E-mail: svarc@fsv.cuni.cz

November 2008

Abstract:

Kooperativní chování je nezbytnou podmínkou pro existenci moderních komplexních společenství a ekonomik, jak je známe dnes. Z pohledu společenských věd je proto zajímavé porozumět, jak takové chování může převažovat i v situacích, kdy jednoduchá úvaha vede k opačnému očekávání, tedy že chování jedinců bude spíše charakterizované tendencí sledovat vlastní, raději než společenský zájem. Model vývoje kooperativního chování, který je prezentován v této práci, navazuje na studie, kde struktura interakcí má podobu sítě ([31], [23], [22]) a vznikl rozšířením jednoduchého modelu popsání v [31]. Na rozdíl od p-vodního modelu je v naší práci kladen důraz na prvek imitace a jeho vliv na rozvoj kooperativního (resp. nekooperativního) chování v simulované populaci agentů. Hlavní motivací pro nás bylo otestovat, zda evoluční dynamika vězňova dilematu hraného na komplexních sítích je skutečně ovlivňována především samotnou topologií sítě nebo je spíše souběžně determinovaná jak topologií tak dalšími evolučními mechanismy, v našem případě konkrétní podobou imitace.

Keywords: kooperativní chování, vězňovo dilema, síť, simulace

JEL: C15, C73, D85.

Acknowledgements:

Tato práce je podporována institucionálním grantem MŠMT 0021620841, grantem GA ČR 402/07/0890 a grantem GAUK 32508 / 2008 Ekonomické modely šíření v sítích s různou topologií.

1. Úvod

Kooperativní chování je nezbytnou podmínkou pro existenci moderních komplexních společenství a ekonomik, jak je známe dnes. Z pohledu společenských věd je proto zajímavé porozumnět, jak takové chování může převažovat i v situacích, kdy jednoduchá úvaha vede k opačnému očekávání, tedy že chování jedinců bude spíše charakterizované tendencí sledovat vlastní, raději než společenský zájem. Užitečným nástrojem, který nám v podobných úvahách ve společenských vědách pomáhá je herně teoretický rámec ([14]) rozvinutý v padesátých letech minulého století a z něj vycházející analýza tzv. věžňova dilematu, který představuje metaforu pro podobná společenská dilemata.

Ve své základní podobě věžňovo dilema zachycuje situaci dvou jedinců, kteří čelí volbě mezi kooperativním společensky prospěšným jednáním a nekooperativním vlastní prospěch sledujícím jednáním. Vzhledem k tomu, že každý z pomyslných hráčů této hry má možnost jednat pouze jedním ze dvou možných způsobů, buďto kooperovat nebo nekooperovat, celá hra vede ke čtyřem možným výsledkům. Každému výsledku je ve hře přiřazena odpovídající odměna. Uspořádání hodnot odměn a další předpoklady hry, které budeme diskutovat v dalších kapitolách, vedou ve věžňově dilematu k závěru, že bez ohledu na volbu soupeře je pro každého hráče nejlepší zvolit nekooperovat. Situaci kdy oba hráči ve věžňově dilematu nekooperují, říkáme Nashova rovnováha.

Nashova rovnováha ve věžňově dilematu se však podstatně liší od chování většiny lidí, které sledujeme v běžném životě. Kooperativní chování spíše převažuje než by bylo pouhou výjimkou. Zkusme tedy třeba předpokládat, že normální lidé neuvážují stejně jako tomu předpokládáme v teorii her a jejich chování není výsledkem racionálních úvah a dedukce. Můžeme třeba předpokládat, že se vzorce chování vyvíjejí podobně jako organismy v přírodě, kdy více úspěšné druhy ustupují těm méně úspěšným. Na podobném předpokladu staví tzv. evoluční teorie her ([24]). Narozdíl od klasické teorie her, nepoužívá její evoluční verze k popsání rovnovážných situací Nashovy rovnováhy, ale konceptu evolučně stabilní strategie. Evolučně stabilní strategie představuje takovou strategii (v našem případě druh chování), která, pokud je používána většinou populace, nemůže být úspěšně napadena a využita jinou, mutantní strategií. Avšak v případě věžňova dilematu oba rovnovážné stavy splývají. Zdá se, že ani předpoklad omezené racionality jedinců nevede skrze evoluční dynamiku v modelu k touženému výsledku.

Současný výzkum kooperativního chování však ukázal, že evoluční modely vycházející z věžňova dilematu přeci jenom mohou vést k výsledku, kdy kooperativní jednání v populaci nejenom dlouhodobě přežívá, ale může se stát převažujícím vzorcem chování. Klíčem k dosažení kooperace je předpoklad, že populace hráčů

věžňova dilematu je strukturovaná, tzn. každý hráč hraje věžňovo dilemma pouze s určitou podskupinou celkové populace. V evoluční teorii her nejčastěji předpokládáme, že každý jednotlivec má stejnou pravděpodobnost interakce, s kterým koliv jiným členem populace. Předpoklad složitější struktury populace nejenom podporuje rozšíření kooperativního chování, ale je nesporně i realističtější předpokladem.

Model vývoje kooperativního chování, který je prezentován v této práci, navazuje na studie, kde struktura interakcí má podobu sítě ([31], [23], [22])¹ a vznikl rozšířením jednoduchého modelu popsáno v práci Allena Wilhitea [31]. Autor modeluje, za pomoci počítačové simulace, interakce v populaci 2500 agentů, kteří vykazují dvě základní schopnosti. Jde o schopnost sehrát hru *věžňovo dilemma* a schopnost zvolit jednu ze dvou možných strategií (*kooperativní* vs. *nekooperativní strategie*) podle výsledku předchozích her ve svém bezprostředním okolí, tedy i her hraných jinými hráči. Podstatou simulace je ukázat, jaký vliv má topologie sítě, ve které je populace agentů uspořádána, na evoluci obou strategií napříč populací. Předmětem zájmu jsou základní topologie sítí: *kompletní síť*, *hvězdice*, *kruh*, *mřížka*, *strom*, *small-world* a *scale-free síť*. Těžištěm Wilhiteovy práce je analýza vzorců rozvoje obou strategií v souvislosti s danou topologií.

V naší práci je naopak důraz kladen na prvek imitace a jeho vliv na rozvoj kooperativního (resp. nekooperativního) chování v simulované populaci agentů. Rozšířením simulace je zde několik variant modelu lišících se v imitačních schopnostech agentů. Z konkrétních topologií se pak soustředím na *small-world* a *scale-free* síť, které velmi dobře reprezentují reálnou ekonomiku a především sociální síť. Hlavní motivací pro nás bylo otestovat, zda evoluční dynamika věžňova dilematu hraného na komplexních sítích je skutečně ovlivňována především samotnou topologií sítě nebo je spíše souběžně determinovaná jak topologií tak dalšími evolučními mechanismy, v našem případě konkrétní podobou imitace.

Práce je strukturována následovně. Navazující kapitola se zabývá jednotlivými stavebními bloky modelu. První část je věnována teorii her a iterační verzi hry *věžňovo dilemma*. Dalším nezbytným krokem v pochopení modelu je studium topologie sítí a teorie grafů, kterému je věnována sekce 2.3.. Poslední sekce pojednává o imitačních schopnostech agentů a jejich formalizovaných definicích. V třetí kapitole lze nalézt popis vlastní architektury modelu a zapojení jednotlivých částí do celku. Popsána je i metodologie vyhodnocování získaných dat. Cílem čtvrté kapitoly je interpretovat výsledky počítačových simulací probraných v druhé, teoretické, části. Pozornost je věnována odlišnostem v chování různých topologií sítí a jejich charakteristickým vlastnostem.

¹První evoluční modely založené na věžňově dilematu, kdy populace byla více strukturovaná, měly podobu prostorových modelů. Viz. [15], [16].

2. Model vývoje kooperativního chování – teorie a definice

2.1. Teorie her a věžňovo dilema

2.1.1. Věžňovo dilema

Hra věžňovo dilema je jen jednou aplikací ze široké skupiny tzv. sociálních dilemat, které jsou doménou především pro tu oblast ekonomie, kterou nazýváme *teorií her*. Hlavním cílem této teorie je (mimo jiné) formalizovat modelové situace sociálních dilemat, jejichž charakteristickým rysem je střet subjektivních zájmů jednotlivých účastníků se zájmem celé skupiny jedinců jakožto celku. V těchto modelových, velmi zjednodušených situacích, je jedinou starostí hráče jeho vlastní profit. Prospěch ostatních hráčů je zcela vynechán z jeho úvah. V případě hry věžňovo dilema, v níž se spolu setkávají vždy jen dvojice hráčů, je výsledkem jednorázové interakce stav, kdy si oba hráči svým defektivním jednáním vyslouží jen velmi malý profit, ačkoliv kooperací by oba získali profit vyšší.

Věžňovo dilema (VD) je tzv. *hra s nenulovým součtem*, kde má každý hráč možnost volby dvou strategií – kooperovat nebo nekooperovat. V interakci s jiným hráčem tedy získáváme čtyři možné kombinace vedoucí ke čtyřem rozdílným výsledkům. Tyto výsledky je možné přehledně zapsat pomocí matice (tabulky), a proto je VD typickou ukázkou her s *výplatní maticí*. V původní podobě, kterou přinesli Merrill Flood a Melvin Dresher, se jednalo o dilema dvou nezávisle vyslychaných věžňů – kompliců, u nichž kooperovat znamenalo mlčet a nekooperovat naopak udat svého komplice. Výplatní matice měla potom podobu různých soudních rozsudků a je znázorněna v tab. 1.

Tabulka 1: Výplatní matice pro původní verzi hry věžňovo dilema

	hráč B mlčí	hráč B udává
hráč A mlčí	půl roku pro oba	7 let pro A, B je volný
hráč A udává	A je volný, 7 let pro B	5 let pro oba

Z pohledu hráče A je v každém případě lepší zradit: „Pokud hráč B mlčí, zradím ho a jsem volný, jinak dostanu půl roku vězení. Pokud mě B udá, udám ho též. Pak půjdu do vězení na pět let a ne na sedm.“ *Zdroj: Gregor [9]*

V zobecněné verzi této hry se již setkáváme s výplatou v podobě zisku (blahobytu, financí, ... obecně užítku). Kooperativní, resp. nekooperativní strategie může nabývat různých forem (poskytnutí / neposkytnutí informací, dostání / vyhnutí se určitým smluveným závazkům a podobně).

Charakteristická je pro tuto jednoduchou hru zbytečnost jakékoliv predikce chování protihráče (v obou případech protihráčova chování je výhodnější nekooperovat – kooperace je dominovaná strategie) a dále pak struktura výplatní matice.

Tabulka 2: **Obecný zápis výplatní matice**

	hráč B kooperuje	hráč B nekoop.
hráč A koop	a, a	b, c
hráč A nekoop	c, b	d, d

Zde $\{a, b, c, d\}$ je množina výplat pro hráče A a B a platí, že: $c > a > d > b$, $2a > c + b > 2d$.
Zdroj: [17]

2.1.2. *Opakovaná (iterovaná) hra*

V jednoduché verzi hry existují jen dvě možné strategie. Rozšíříme-li však tuto hru na více kol do podoby, kdy si hráči pamatují výsledky předchozích kol, vzrůstá počet možných strategií exponenciálně. Přesto pro konečný a hráčům známý počet kol zůstává i zde kooperace dominantní strategií (nekooperovat dominuje kooperaci). Důkaz pro hru s počtem kol n má rekurentní charakter a vychází ze situace v posledním kole hry, která je podobná jednokolové verzi a v níž dominuje nekooperativní strategie. Tím se problém nejistoty přesouvá na kolo předposlední a problém se zužuje na hru o $n - 1$ kolech. Stejným způsobem se pokračuje až k původní jednorázové hře.

Kooperativní chování se objevuje až v některých strategiích u her neukončených nebo u her s nejistým počtem kol. Jejich společným znakem a předpokladem je však automatická kooperace v prvním kole.

2.1.3. *Vězňovo dilema a realita*

Jako ilustrace vězňova dilematu v reálném kontextu jsou v literatuře oblíbené některé modelové scény. Symboliku vězňova dilematu najdeme například u situace dvou států při závodu ve zbrojení. Jeden stát nedůvěřuje druhému, že neporuší dohodu, ve které se oba zavázali zastavit výrobu ve zbrojním průmyslu, a tak nakonec (při absenci třetí autoritativní strany) oba pokračují ve výrobě.

Jiný příklad uvádí dva závodní cyklisty ve vedoucích pozicích daleko před pelotonem. Jeden nechce druhému usnadnit cestu větrným štítem (aby se těsně před cílem nesnadného závodu nechal předjet) a tak jsou oba brzy dohnáni lépe organizovaným pelotonem. Oba názorné příklady jsou však spíše dokladem malé představitivosti a oblíby stereotypně opakovaných ilustrativních situací, kterou je ekonomická obec známá (viz fenomén Robinsona Crusoe na opuštěném ostrově). Vězňovo dilema reprezentuje každodenní interakce ekonomických subjektů opírajících se o vzájemnou důvěru obou stran a v různých formách jej nalezneme ve většině obchodních a právních vztahů neboť formálně zakotvená pravidla a instituce nevytvářejí zcela přesný a dokonale výstižný rámec a jistý prostor musí vždy být pokryt zvyklostmi, etikou a důvěrou zúčastněných aktérů.

2.2. Vězňovo dilema v populaci agentů

Pionýrská práce v ekonomii kooperace a vývoje kooperace mezi větším počtem agentů Roberta Axelroda [4] definuje několik důležitých podmínek pro úspěšný vývoj kooperativního jednání.

Axelrod si klade za cíl poodkrýt odpovědi na tři základní otázky:

1. Kde se bere potenciálně kooperativní strategie v prostředí jinak nekooperujících agentů?
2. Co je to za strategii, která přežívá v tomto prostředí?
3. Za jakých podmínek může tato strategie přežít „útoky“ nekooperujících strategií?

Jeho dva experimenty měly podobu turnaje sofistikovaných strategií formou „každý s každým“. Ačkoli se zde jednalo o velmi specifický typ sítě (kompletní síť), ve které spolu agenti interagují, a samotné strategie neměly ambice co nejdříve simulovat lidské rozhodování, mnoho poznatků je aplikovatelných i na později modelované komplexní sítě. Zajímavý byl především samotný výsledek obou turnajů. Vítězem byla opakovaně strategie TIT-FOR-TAT (česky snad nejlépe odpovídá výraz „oko za oko“), která zaujala především svou jednoduchostí. Vše, co radí svému zástupci, zní: „Začni kooperací a potom hraj tak, jak hrál tvůj soupeř v předchozím kole.“

Na předních místech byly i jiné, kooperaci nakloněné, strategie. Klíčový vliv na dobré umístění v turnajích měly pak výsledky vzájemných her těchto kooperaci-nakloněných strategií.

Hlavní poznatky Axelrod shrnuje takto:

- Nutný, avšak nikoliv postačující předpoklad rozvoje kooperace je pro hráče šance / hrozba, že se interakce obou dvou hráčů bude v budoucnosti opakovat.
- Dalším předpokladem je dostatečná diskontní míra.
- Při dostatečné diskontní míře neexistuje univerzální a nejlepší strategie, tedy strategie nerespektující momentální chování protihráče.
- Příběh rozvoje kooperace má tento průběh:
 1. Kooperace vzniká a rozvíjí se ve shluku jedinců, kteří navzájem kooperují na základě reciprocity.
 2. Reciprocita přežívá i v prostředí, kde existuje mnoho jiných strategií.
 3. Kooperace založená na reciprocitě přežívá i útoky zákeřných strategií.

Implementací sofistikovaných strategií, které byly zastoupeny v Axelrodových turnajích, by vznikla populace velmi specifických agentů. Pokud by byl dodán časový prvek a princip, kterým by se úspěšní agenti množili a neúspěšní vymírali, vznikl by model evoluce jednotlivých sofistikovaných strategií. Je velmi pravděpodobné, že by jednou z úspěšných strategií byla právě jednoduchá TIT-FOR-TAT strategie nebo alespoň některá ze strategií příbuzných. Rozhodující vliv na přežití těchto strategií by měla frekvence, s níž by kooperující agenti interagovali navzájem.

Evoluce formou přežívání nebo vymírání však není jediným prostředkem evoluce kooperace. Jinou možností pro rozvoj takového jednání je imitace. Imitující jedinci vytvářejí velký prostor pro interakci kooperativních (a stejně tak nekooperativních) strategií navzájem. Allen Wilhite [31] proto modeloval populaci 2500 imitujících agentů uspořádaných do sítí různých topologií. Sledoval, jaký vliv má právě topologie sítě, již jsou agenti propojeni (a přes kterou probíhají interakce formou VD), na přežití kooperativního chování. Právě Wilhitův model je základním pilířem této práce. Je zde rozšířen o další možné typy imitací a sledováno je více proměnných veličin. Jiné práce se soustředí na další zobecnění modelu. Je simulováno více sociálních dilemat² a zisky agentů jsou průměrovány, případně upraveny o náklady spojené s vysokou frekventovaností neaktivnějších agentů³.

2.3. Topologie sítí

2.3.1. Základní pojmy

Pro lepší orientaci v textu začnu stručnou⁴ definicí základních pojmů z topologie sítí a teorie grafů⁵

- *Uzel (node)*, někdy též *vrchol (vertex)*, je základní prvek sítě. V našem modelu jsou uzly reprezentovány jednotlivými agenty. Síť G tedy tvoří populace n agentů.
- *Vazba (link)*, jinak také *hrana (edge)*, představuje spojení dvou uzlů. Může mít podobu *orientované (directed) vazby*, kdy probíhá komunikace pouze z jednoho uzlu do druhého, nebo *neorientované (undirected) vazby*, která je v podstatě kombinací dvou opačně orientovaných vazeb prvního typu. Formálně můžeme zapsat vazbu mezi agenty $\{i, j\} \in G$ jako $i \sim j \in G$, přičemž platí, že pokud $i \sim j \in G$, potom také $j \sim i \in G$, neboť v našem modelu budeme

²Například Santos [19] zkoumá mimo VD i *Snowdrift* a *Stag Hunt*.

³Viz Jackson, Wolinsky [12].

⁴Pro podrobnější definici pojmů viz Dorogovtsev & Mendes [7].

⁵Některé z těchto pojmů nemají zcela ustálený český ekvivalent. Rozhodli jsme se proto pro termíny užívané v překladu populárně vědecké práce A. Barabásiho [6]. Pro přesnost ale doplňuji termíny ze současné literatury v anglickém jazyce.

vazbou rozumět neorientovanou vazbu jednotkové délky (viz dále), přičemž půjde výhradně o vazby mezi dvěma navzájem různými uzly.

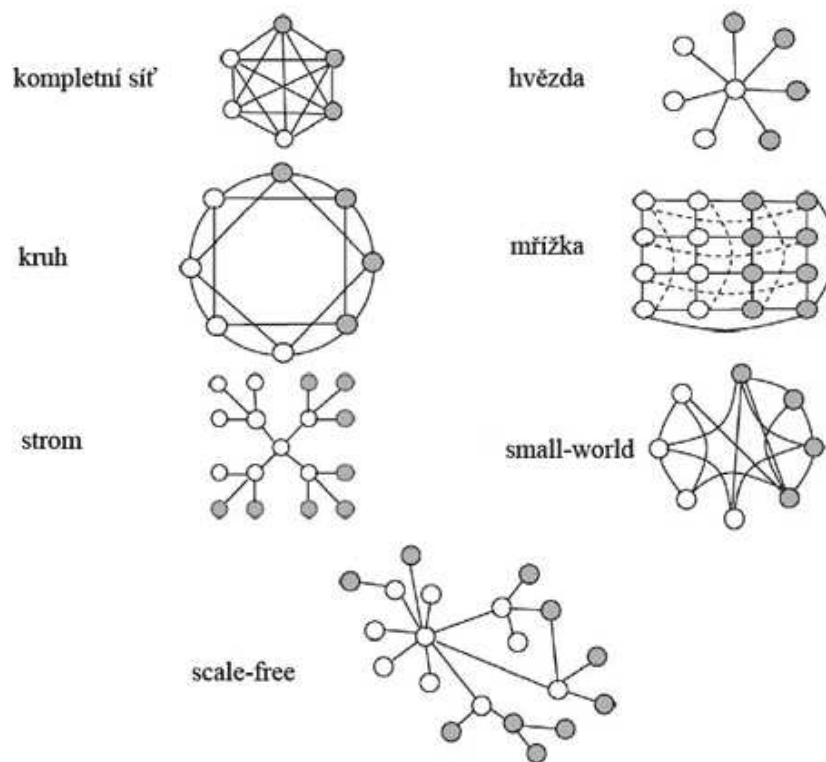
- *Délka vazby (length)*, je kvantitativní vlastností vazby. Jednotková délka všech vazeb potom vyjadřuje jistou ekvivalenci, se kterou se přistupuje k *váze (weight)* jednotlivých vazeb.
- *Řád (degree)*, též *konektivita (connectivity)*, je základní charakteristika každého uzlu značící počet vazeb vycházejících z daného uzlu.
- *Nejkratší cesta (shortest path)*, znamená nejmenší počet vazeb mezi dvěma uzly (agenty). Průměrnou nejkratší cestu potom nazýváme *průměrem sítě*.
- *Koeficient shlukování (clustering coefficient)* vyjadřuje pravděpodobnost, že jsou dva uzly z nejbližšího okolí třetího uzlu (tzn. z množiny všech uzlů připojených vazbou k tomuto uzlu) rovněž navzájem připojeni vazbou.

2.3.2. Základní topologie sítí

Na obr. 1 jsou znázorněny základní typy topologie sítí. Každý typ má svoje specifické charakteristiky, které ho činí efektivní v různých situacích. Tuto myšlenku však lze formulovat také jinak: každá síť se během svého vzniku a vývoje utvořila do topologického typu, který nejlépe zajišťoval její fungování. Na tomto místě ale není důležitý původ a vývoj sítí, neboť v modelu uvažujeme jen krátký časový horizont, ve kterém jsou možné změny tvaru sítě zanedbatelné.

- *Kompletní síť* představuje přímé uplatnění pravidla „každý s každým“. Jednoduchost, s jakou je tato topologie strukturována, je vyvážena vysokými náklady na fungování. Je to dáno mimo jiné exponenciální závislostí mezi počtem uzlů a počtem vazeb.
- *Hvězda* je centralistický typ sítě. Jeden náhodný uzel je připojen ke všem ostatním. Toto uspořádání je efektivní například v praxi letecké dopravy. Centrální uzel (*hub*) slouží jako přestupní stanice na trase z jednoho periferního letiště do druhého. Dalším typickým zapojením jsou např. televizní nebo rozhlasová vysílání, některé počítačové systémy a telekomunikační sítě. Počet vazeb mezi n uzly je roven $n - 1$.
- V *kruhu* je každý uzel připojen právě ke dvěma sousedním uzlům. Pokud se má informace dostat z jednoho uzlu do druhého, musí projít přes všechny mezilehlé uzly. S kruhem se setkáváme opět v počítačových sítích (*token ring*). Počet vazeb je roven počtu uzlů.

Obrázek 1: Základní topologie sítí



zdroj: Wilhite [31]

- *Mřížka* propojuje uzly do „šachovnicového“ uspořádání a stala se základním typem sítí pro ekonomické modelování. V sociálních sítích je reprezentována městskou aglomerací nebo například uspořádáním bytů a kanceláří v patrech budovy. V modelování se obvykle uvažuje jako neohraničená síť; případně bývá uzavírána do torusu.
- *Strom* uspořádává uzly hierarchickým způsobem, kdy jeden uzel je připojen ke k dalším uzlům, připojených ke k novým uzlům, a ty pak dále připojeny stejným způsobem ke k dalším uzlům. Hierarchický charakter dává této síti velký význam v sociálních sítích, firmách, mocenských organizacích a podobně. Počet vazeb je opět roven $n - 1$.
- *Small-world sítě* jsou širší skupinou sítí vykazující některé společné charakteristické prvky. Je to především malý *průměr sítě*, vysoké rozdíly v *řádech* a vysoká hodnota koeficientu shlukování. Charakteristické jsou též krátké *cesty* mezi jinak vzdálenými uzly (například osobní známost versus fyzická vzdálenost mezi lidmi), které velmi redukuje *průměr sítě*. Zastoupení mají například v

neuronových sítích, elektrických rozvodných sítích apod.

- *Scale-free síť* vykazuje distribuci řádů podle tzv. *power-law* rozdělení. V důsledku to znamená, že několik uzlů (kterým někdy říkáme *huby*) má extrémně vysoký *řád* a naopak velké množství uzlů má zanedbatelný *řád*. Typickým představitelem této topologie je internet a jeho world-wide-web síť směřovaných hypertextových odkazů. Většina nových webových stránek je připojena odkazy na některý z centrálních hubů (jde například o tzv. *vyhledávače*).

Prvních pět sítí (*hvězda*, *kompletní síť*, *kruh*, *mřížka* a *strom*) se od zbylých dvou podstatně liší svojí vzorovou pravidelností. Zde je nutno podotknout, že se tyto sítě nevyskytují vždy jen v „čisté“ podobě tak, jak byly definovány a jak je znázorněno na obrázku 1.1. Naopak small-world a scale-free síť se vyznačují významným zastoupením náhodného prvku. Tyto sítě mohou být na cestě od náhodných sítí (též *náhodných grafů*) k pravidelným a vykazují některé ze statistického hlediska velmi zajímavé vlastnosti. Těmto vlastnostem proto věnuji samostatný prostor⁶.

2.3.3. Charakteristiky sítě

Řád a rozdělení řádů

Typickou vlastností každého uzlu sítě je jeho *řád* k . Definuje počet vazeb připojených k danému uzlu. V této studii budou uvažovány pouze sítě s neorientovanými vazbami, proto bude každému uzlu příslušet pouze jeden *řád*. Současně bude stupeň *řádu* udávat i počet nejbližších sousedů daného uzlu. Jednou z rozhodujících veličin pro každou jednotlivou síť je potom distribuce řádů s distribuční funkcí $P(k)$.

Průměrná nejkratší cesta a průměr sítě

Pojmem *cesta* máme na mysli uspořádanou posloupnost navzájem propojených uzlů mezi libovolnými dvěma uzly $\{u, v\}$. Nejkratší cestu $l_{u,v}$ mezi uzly u a v potom definujeme jako počet uzlů v nejkratší možné posloupnosti mezi u a v . U každé sítě potom měříme především průměrnou nejkratší cestu \bar{l} a nejdelší nejkratší cestu, tedy *průměr sítě (diameter)*⁷.

Koeficient shlukování

Jestliže je uzel u řádu $k^{(u)}$ potom je největší počet možných vazeb mezi $k^{(u)}$ susedy roven $k^{(u)}(k^{(u)} - 1)/2$. Existuje-li jich však pouze $m^{(u)}$, potom je shlukovací koeficient uzlu u podílem počtu existujících a všech možných vazeb mezi nejbližšími susedy.

$$C^{(u)} = m^{(u)} / [k^{(u)}(k^{(u)} - 1)/2] = 2m^{(u)} / k^{(u)}(k^{(u)} - 1) \quad (1)$$

Shlukovací koeficient uzlu je možné chápat i jako pravděpodobnost vazby mezi

⁶Viz 2.3.4., 2.3.5. a 2.3.6..

⁷Část odborné literatury používá výraz *diameter* jako označení pro průměrnou nejkratší cestu.

dvěma sousedními uzly. Shlukovací koeficient sítě je potom aritmetický průměr shlukovacích koeficientů přes celou množinu uzlů.

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N [2m^{(i)}/k^{(i)}(k^{(i)} - 1)] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N C^{(i)} \quad (2)$$

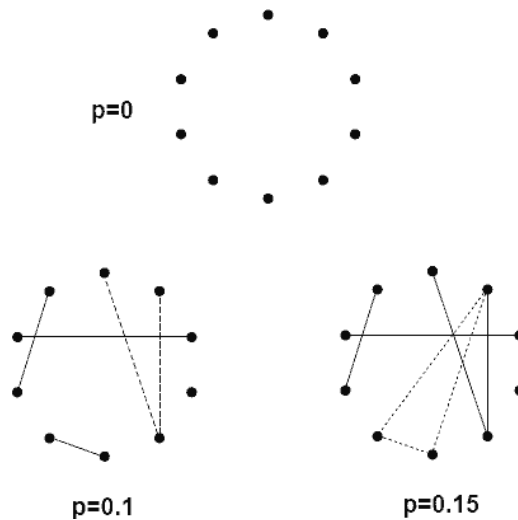
Ten je potom možno chápat jako pravděpodobnost existence třetí vazby mezi libovolnými třemi uzly dvěma vazbami již propojenými. Například v kompletní síti je $C = 1$ a naopak pro síť typu strom je $C = 0^8$.

2.3.4. Náhodné sítě

Náhodnou sítí budeme rozumět síť, kterou ve své práci popsali zejména matematici Erdős a Rényi a která splňuje následující podmínky:

1. Celkový počet uzlů je stálý a je roven N .
2. Pravděpodobnost vazby mezi uzly u a v je rovna p .

Obrázek 2: Vliv parametru p na počet a strukturu vazeb v náhodné síti



zdroj: Barabási [2]

Průměrný počet vazeb (a nejlepší nestranný odhad konektivity uzlů) takové sítě je tedy roven $\frac{pn(n-1)}{2}$ a průměrná konektivita je $\bar{k} = p(N - 1)$. Pro dostatečně velké N má konektivita uzlů přibližně Poissonovo rozdělení:

$$P(k) = \frac{e^{-\bar{k}} \bar{k}^k}{k!}$$

⁸Odvození obou výrazů 1 a 2 najede čtenář v Dorogovtsev & Mendes [7]

Dále odhad průměrné nejkratší cesty počítáme podle [7] jako

$$\bar{l} = \ln(N)/\ln(pN) \quad (3)$$

a jelikož tato charakteristika nabývá i pro velmi velká N poměrně malých hodnot, hovoříme v souvislosti s náhodnými sítěmi o takzvaném *small-world efektu*. Tento jev nejvíce proslavil experiment Stanley Milgrama z Harvardovy univerzity „Šest stupňů odloučení“. Spočíval ve sledování cesty dopisních obálek od náhodně vybraných lidí ke konkrétnímu člověku. Každý, kdo dopis dostal, připsal svoje jméno a přeposlal svému známému, o kterém se domníval, že by se s cílovou osobou (o které se dozvěděl pouze základní informace a sám po ní nesměl pátrat) mohl osobně znát. Průměrný počet meziadresátů byl překvapivě pouze šest (odtud název). Navíc se lze domnívat, že skutečné nejkratší cesty přes osobní známosti by byly ještě mnohem kratší, neboť nikdo z meziadresátů nemohl vědět o všech vazbách svých známých.

Náhodné sítě však ze své podstaty nemusejí být zcela propojené a mohou být pouze množinou většího počtu menších sítí. Důležitou roli zde hraje průměrná konektivita uzlů.

- pokud $\bar{k} < 1$, potom je pravděpodobně síť tvořena izolovanými částmi
- pokud $\bar{k} > 1$, je jedna z izolovaných částí výrazně větší než ostatní a nazýváme ji *giant cluster*
- pokud $\bar{k} > \ln(N)$ je síť jeden propojený celek⁹

Koeficient shlukování je pro náhodné sítě roven $p = \frac{\bar{k}}{N}$, neboť pravděpodobnost vazby mezi dvěma uzly zůstává stále stejná.

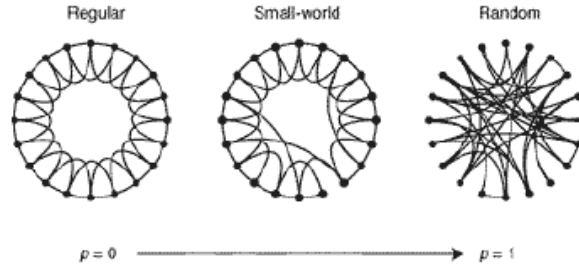
2.3.5. *Small-world síť*

Náhodné sítě sice v některých směrech docela dobře vystihují reálné sítě, avšak většina reálných sítí ve skutečnosti nevzniká zcela náhodně a tedy se i v některých statistických charakteristikách od náhodných značně odlišuje. Například sociální sítě, jako je síť známostí z Milgramova experimentu, zdaleka nejsou formovány náhodně. Jednou z charakteristických vlastností těchto sociálních sítí je shlukování. Watts a Strogatz [30] proto navrhli model sítě (*Watts-Strogatz model*), která vykazuje jednak silný small-world efekt a zároveň i vysoký průměrný koeficient shlukování. Jeho další předností je relativní jednoduchost generujícího algoritmu. Základem sítě je uzavřená jednorozměrná síť vrcholů propojených neorientovanými vazbami se svými K nejbližšími sousedními vrcholy. V druhém kroku je každá vazba

⁹Volně převzato z [2]

s pravděpodobností p přesměrována k jinému vrcholu než byl původní z K sousedních uzlů, tak aby nevznikla *smýčka* (*self-loop*) nebo dvojitá vazba (tedy nová vazba mezi vrcholy již propojenými). Pro $p \sim 1$ je síť blízká náhodné síti. Avšak již pro velmi nízké hodnoty p (počínaje $p = 2/NK$) vykazuje síť silný small-world efekt.

Obrázek 3: Vliv parametru p na strukturu sítě



zdroj: Albert & Barabási [2]

Pro $pKN > 1$

$$\bar{l}(N, p) \sim \frac{N \ln(pKN)}{K pKN} \quad (4)$$

Naopak shlukovací koeficient (zde nezávislý na N) je velmi stabilní pro velkou část intervalu $< 0; 1 >$. Platí, že

$$C(p) \simeq C(0)(1 - p^3) \quad (5)$$

, kde $C(0) = \frac{3(K-2)}{4(K-1)}$ ¹⁰.

Distribuce řádů má přibližně průběh Poissonova rozdělení a průměrná konektivita zůstává samozřejmě K (vazby jsou v druhém kroku pouze přesměrovány a nikoliv přidány).

2.3.6. Scale-free síť

Další vývoj sociálních věd a teorie grafů, ke kterému značnou měrou přispěl tým kolem A.-L. Barabásiho, znamenal především lepší porozumění časového vývoje a růstu existujících komplexních sítí. Jelikož je většina sítí ve svém vývoji příliš komplikovaná a především roste velmi pomalu, došlo k důležitým objevům až na konci devadesátých let v souvislosti s nesmírně rychlým rozvojem internetu a jeho world-wide-web sítí hypertextových odkazů. V tomto vývoji se ukázali jako klíčové dva principy: výhoda¹¹ starých uzlů – *princip růstu* a dále *princip preferenčního*

¹⁰Výrazy 4 a 5 převzaty z [2]

¹¹Důležité je poznamenat, že pro většinu uživatelů služby www je jedním z cílů právě co nejvyšší počet příchozích vazeb v podobě hypertextových odkazů. Proto mluvíme o výhodě.

připojování uzlů nových. Staré uzly mají díky delší době vlastní existence větší pravděpodobnost objevení novými uzly. Ještě větší výhodou se však pro uzly vysokého řádu ukázal samotný vysoký stupeň řádu. Jevu, kdy se nové uzly často připojují nejprve k největším již existujícím uzlům (nazývaným *centra* nebo někdy trochu nejasně *huby*) říkáme preferenční připojování. Důsledkem těchto dvou principů je, že uzly nejvyššího řádu bývají současně i uzly nejstaršími a jejich náskok v počtu vazeb se navíc v čase neustále zvyšuje.

Model scale-free sítě Barabási-Albert implementuje oba principy následujícím způsobem:

1. Princip růstu: Na začátku je vytvořen malý počet m_0 uzlů. V každém dalším kroku t je přidán jeden nový uzel připojený m vazbami ($m \leq m_0$) ke stávajícím uzlům.
2. Princip preferenčního připojování: Pravděpodobnost, že bude nový uzel připojen k již existujícímu i -tému uzlu řádu k_i , je podle [2]

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_{j=1}^N k_j} \quad (6)$$

Vzniklá síť o $t + m_0$ uzlech a mt hranách vykazuje mocninné rozdělení řádů s exponentem $\gamma_{SF} = 3$ nezávislým na m a s distribuční funkcí bez lokálního maxima (škály).

Pro $t \rightarrow \infty$ potom¹²

$$P(k) \sim 2m^\beta k^{-\gamma_{SF}}$$

kde $\beta = \frac{1}{2}$.

Pro odhad průměrné nejkratší cesty ani koeficientu shlukování není doposud známé analytické odvození. Empirické metody však naznačují, že průměrná nejkratší cesta roste logaritmicky s velikostí sítě (avšak pomaleji než u náhodného grafu) a naopak shlukovací koeficient s počtem uzlů N klesá podle mocninného zákona $C \sim N^{-0.75}$, opět však pomaleji než v případě náhodného grafu.

Každá z uvedených topologií má svoje specifická uplatnění. Ne náhodou se například síť world-wide-web vyvinula ohromnou rychlostí ve velmi rozsáhlou scale-free síť. Je to právě charakteristický velmi malý průměr této sítě, který umožňuje klientovi najít hledanou informaci vynaložením jen zanedbatelného úsilí. Obecně vzato, scale-free sítě vznikají tam, kde je důležitá rychlost přenosu informace, zboží nebo napří-

¹²Podle Albert & Barabási [2].

klad cestujících (sít' letadlových a jiných dopravních linek má taktéž podobu scale-free sítě). Další charakteristickou vlastností je potom vysoká odolnost proti náhodným selháním. Některé experimenty již potvrdily vysokou odolnost internetu proti takovým technickým selháním, jako jsou výpadky v provozu uzlových bodů a především elektronických spojů (vazeb mezi uzly). Stejná vlastnost těchto sítí, tedy vysoká konektivita některých uzlů, je však současně považována za hendikep, neboť cílené útoky na centrální uzly (huby) mohou sít' velmi rychle vyvézt z plynulého provozu a způsobit informační nebo dopravní kolaps. Stojí za povšimnutí, že původně zamýšlená topologie internetu se z těchto důvodů značně lišila od té současné. Překotný a nekontrolovatelný vývoj ale vzal osud pevně do svých rukou a dal přednost přímočaré efektivitě před bezpečností. V otázce bezpečnosti a společenských rizik jsou zkoumány nejen informační scale-free sítě, ale též sítě ekonomické, finanční, sociální nebo například sítě sexuálních kontaktů a to za účelem zamezení šíření HIV virové nákazy apod.

2.4. Imitace

Základním prvkem v rozhodování zde prezentovaných agentů je imitace okolí. Imitace je tak zároveň i jediným prostředkem šíření kooperativních a nekooperativních strategií. Každý agent zná strategie a celkové zisky svých sousedů. Zná též i jejich řád. Rozhoduje se podle chování všech jeho sousedů v posledním hracím kole a neví, jakou strategii zaujmou tito jeho protihráči (případně spoluhráči) v nadcházejícím kole. Nedisponuje ani žádným algoritmem predikce pro její odhad (např. na základě znalosti historie posledních hracích kol).

U některých autorů ¹³ lze již najít imitaci podle průměrných zisků nebo podle náhodně vybraných sousedních agentů. V této práci porovnávám osm základních imitačních chování a jejich dopad na vývoj celé populace. Následuje formalizovaná definice jednotlivých typů imitací. Výsledky a jejich analýzu lze najít v druhé části práce.

d resp. d_i je řád rozhodujícího se agenta, resp. jeho i -tého souseda, kde $i \in 1 \dots d$
 z bude zisk našeho agenta v posledním kole, s jeho současná strategie a S strategie v příštím kole. s a S nabývají hodnot 1 nebo 0, podle toho zda agent kooperuje (bude kooperovat) – 1, resp. nekooperuje (nebude kooperovat) – 0.

z_1, z_2, \dots, z_d jsou zisky sousedních agentů z minulého kola

$o_1^i, o_2^i, \dots, o_{d_i}^i$ jsou zisky ze všech her i -tého sousedního agenta z minulého kola

s_1, s_2, \dots, s_d jsou strategie sousedních agentů z minulého kola

Agenti mohou imitovat (z vlastního pohledu):

1. celkově nejúspěšnějšího sousedního agenta – zjišťuje se celkový zisk blahobytu

¹³Viz např. Santos [19].

- z posledního hracího kola. Tedy $S = s_i$, kdy $\sum_{k=1}^{d_k} o_k = \max\{\sum_{k=1}^{d_m} o_m; m \in 1..d\}$. Neboli $S = s_i$, pokud $z_i = \max\{z_1..z_d\}$.
2. nejúspěšnějšího sousedního agenta, pokud je jeho blahobyt vyšší než vlastní – $S = s_i$ pokud $z_i = \max\{z_1..z_d\}$. Jinak se strategie nemění.
 3. souseda s nejlepším průměrným ziskem – rozhodují průměrné výnosy agentů z každé jednotlivé hry: $S = s_i$, kdy $\frac{z_i}{d_i} = \max\{\frac{z_m}{d_m}; m \in 1..d\}$.
 4. souseda s nejlepším průměrným ziskem, pokud není můj průměrný zisk vyšší: $S = s_i$, kdy $\frac{z_i}{d_i} = \max[\{\frac{z}{d}\} \cup \{\frac{z_m}{d_m}; m \in 1..d\}]$
 5. podle převažující strategie ve vlastním okolí: $S = 0$, pokud $\sum_{m=1}^d s_m + s < (d + 1)/2$; $S = 1$, pokud $\sum_{m=1}^d s_m + s > (d + 1)/2$; jinak $S = s$.
 6. podle nejvyššího minimálního zisku z obou strategií v okolí sousedních agentů: u (resp. v) je počet sousedních kooperujících (resp. nekooperujících) agentů ($d = u + v$). $c_1..c_u$ jsou agenti, kteří v posledním kole kooperovali. Podobně $n_1..n_v$ jsou agenti, kteří nekooperovali. $S = 1$, pokud $\min\{z_{c_1}..z_{c_u}\} > \min\{z_{n_1}..z_{n_v}\}$ a $S = 0$, pokud $\min\{z_{c_1}..z_{c_u}\} < \min\{z_{n_1}..z_{n_v}\}$, jinak $S = s$.
 7. podle nejvyššího minimálního zisku z obou strategií v okolí sousedních agentů se započtením vlastního dosaženého zisku: u (resp. v) je počet sousedních kooperujících (resp. nekooperujících) agentů ($d = u + v$). $c_1..c_u$ jsou agenti, kteří v posledním kole kooperovali. Podobně $n_1..n_v$ jsou agenti, kteří nekooperovali. Pokud $s = 1$, potom $S = 1$, pokud $\min\{z, z_{c_1}..z_{c_u}\} > \min\{z_{n_1}..z_{n_v}\}$ a $S = 0$, pokud $\min\{z, z_{c_1}..z_{c_u}\} < \min\{z_{n_1}..z_{n_v}\}$, jinak $S = s$. Analogicky pro $s = 0$.
 8. podle očekávaného zisku z obou strategií na základě znalosti užitých strategií z posledního kola. Pokud $ua + vb + a > uc + vd + d$, kde u (resp. v) je počet sousedních kooperujících (resp. nekooperujících) agentů ($d = u + v$) a $\{a, b, c, d\}$ jsou zisky z výplatní matice (viz kapitolu o VD), hráč bude v nadcházejícím kole kooperovat. Jinak kooperovat nebude, nebo (v případě rovnosti obou výrazů očekávaných zisků) si ponechá stávající strategii.

Chování agenta podle bodu 8. nelze nazývat imitací. Do simulace bylo toto chování zahrnuto pro srovnání velmi primitivních prvků chování reprezentovaných jednotlivými imitacemi v kontrastu s racionálním jednáním vypočítavého agenta, který se již blíží představě ekonomického subjektu známého z klasických ekonomických disciplín.

Další možné imitace by mohli spočívat v agentově širší znalosti okolí a výsledků her, které v něm probíhají. Například mezi sousedními agenty, pokud spolu inter-

agují. Rozšíření by se mohlo dostat i jeho paměti, kde by své chování odvozoval od dění v delším časovém horizontu.

3. Architektura modelu a metodologie

3.1. Konstrukce sítě agentů

V inicializační fázi každé simulace je vytvořena zcela nová a jedinečná síť na základě vstupních parametrů. Pro small-world i scale-free sítě byly implementovány algoritmy již popsané v předchozí kapitole. Generování náhodných čísel zajišťují algoritmy systémových prostředků a použité knihovny Repast Toolkit¹⁴. Následně je u sítě prověřen počet komponent, který nesmí přesáhnout hodnotu jedné. V takovém případě, kdy počet komponent přesáhne jedna a síť je tudíž „rozpojena“ na dvě nezávislé podsítě, je vytvořena síť nová a celý postup se opakuje. Výsledkem je zcela propojená síť zadané topologie. Všechny sítě mají společnou hodnotu počtu uzlů (2500) a průměrné konektivity (4,0). Sítě topologie small-world jsou generovány s parametry *pravděpodobnosti přesměrování* $p = 0.05$ a počáteční konektivitou $K = 4$. Scale-free sítě jsou vytvořeny s parametry: $m_0 = 3$ a $m = 2$.

Každý jednotlivý uzel je nyní ztotožněn s jedním agentem. Vazby uzlů představují interakční spoje mezi agenty. Tyto se během simulačního cyklu spojeného s touto sítí již nemohou nijak změnit. Nutný předpoklad modelu je tedy jistá krátkodobost simulované situace.

Ve druhém kroku je agentům přiřazena počáteční strategie, podle které budou hrát věžňovo dilema v prvním kole simulace tak, aby na začátku kooperovala právě polovina z celkového počtu 2500 agentů.

3.2. Průběh simulace

V každém kole simulace sehraji všichni agenti hru věžňovo dilema se všemi svými nejbližšími sousedy. Počet her v jednom kole je tedy roven počtu vazeb mezi uzly. Pro small-world sítě je to počet 5000 (konektivita uzlů je $K = 4$ a vazby jsou neorientované, tedy je počet her je roven $2500 * 4/2$) a pro scale-free sítě 4999 (konektivita se limitně blíží čtyřem). Ve stejném kroku sehraji agenti jednu hru i sami se sebou¹⁵. V dalším kroku obdrží výsledky ze svých her deklarovaných ve výplatní matici a výslednou sumou nahradí údaj z předchozího kola¹⁶ o celkovém blahobytu ve svém

¹⁴Repast Toolkit (The Recursive Porous Agent Simulation Toolkit) je volně šiřitelná knihovna pro vývoj multiagentních modelů.

¹⁵V anglické literatuře je tato hra nazývána self-play. Do tohoto modelu jsme ji začlenili především za účelem kontinuity s experimenty již publikovanými. Výsledky simulací bez self-play se v mnoha případech s těmito rozcházejí.

¹⁶V kole nula je blahobyť všech agentů nulový.

portfoliu, který je známý opět pouze nejbližším sousedním agentům. Výplatní matice $\{a, b, c, d\}$ má konkrétně tvar $\{4, 0.1, 0, 7\}$.

V simulacích se *synchronním rozhodováním* agentů mohou nyní všichni agenti přehodnotit své strategie na základě výsledků tohoto posledního odehraného kola. Ve skutečnosti se v tomto rozhodovacím procesu agenti rozhodují postupně jeden za druhým (jinou možnost ani počítačová simulace nenabízí), proto jsou jejich nová strategická rozhodnutí ukládána do zásobního bufferu a skutečná změna strategií (pokud se k ní agenti rozhodnou) je provedena až po rozvaze posledního agenta.

Pro simulace s *asynchronním rozhodováním* je náhodně vybrána (v každém kole jiná) třetina agentů (přesněji 33% z celkového počtu 2500 agentů), kterým je umožněno přehodnotit strategie. Toto alternativní schéma umožňuje předejít zacyklení a vzorové periodicitě v chování sítě jako celku, pozorovatelným v případě synchronního rozhodování.

Simulace probíhaly po dobu od 200 do 3000 kol v závislosti na rychlosti dosažení případného stabilního stavu. Tento stabilní stav nabývá různých podob. V několika případech se chování agentů ustálilo v neměnném stavu. Další pozorovanou stabilní polohou je stav periodického opakování změny strategií. Jiným je zase kolísání kolem rovnovážného stavu. Tyto výsledky jsou podrobně zkoumány v další kapitole.

3.3. Sběr dat

Na konci každého kola jsou sledovány tyto proměnné:

- čas od začátku simulace v podobě počtu kroků
- poměr počtu kooperujících agentů proti počtu všech 2500 agentů (dále jen *kooperační poměr*)
- celkový blahobyt populace 2500 agentů
- rozdělení poměru kooperujících agentů podle řádu

Po skončení simulace je navíc vyhodnocen počet kol, potřebných k uvedení kooperačního poměru do rovnovážného stavu. Metoda k určení tohoto údaje vychází z měření kvadratických odchylek od průměrné hodnoty v nekonečnu. Za nekonečno je bráno dostatečně velké číslo N_∞ simulovaných kol. Průměr je potom vypočten z dostatečného počtu n posledních kol. Obě tyto proměnné jsou získány odhadem z grafu. Důležité je, aby n pokrývalo dostatečný počet cyklů ve vývoji poměru kooperace. Pokud se v některém kole k z intervalu $< 0; N_\infty >$ přiblíží střední kvadratická odchylka σ_k^2 z n následujících kol ke střední kvadratické odchylce $\sigma_{N_\infty-n; N_\infty}^2$ z n posledních kol do vzdálenosti menší než $p\sigma_{N_\infty-n; N_\infty}^2$, kde obvykle $p = 0.05$, potom je kolo k prohlášeno za počátek stabilního stavu poměru kooperace.

Na závěr jsou získány některé statistické charakteristiky sítě. Jsou to především koeficient shlukování a průměr sítě (nejdelší z nejkratších cest). Jejich výpočet zajišťují algoritmy implementované v knihovně Repast.

Pro každou kombinaci vstupních parametrů bylo spuštěno třicet shodných simulací a odečtené hodnoty byly zprůměrovány.

4. Analýza a interpretace výstupních dat a výsledků simulací

Tabulka 3: Souhrn výsledků simulací

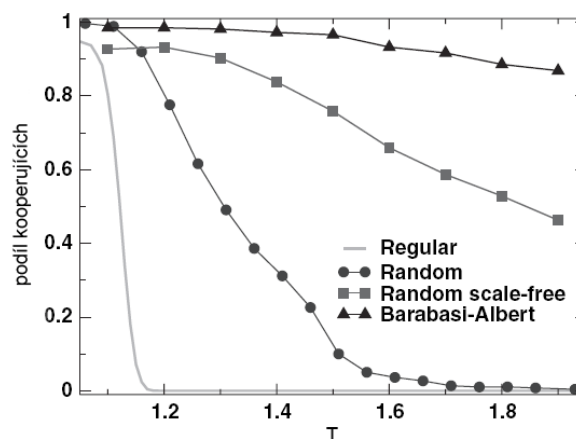
small-world síť					scale-free síť			
synchronní přehodnocení			asynchronní přehodnocení		synchronní přehodnocení		asynchronní přehodnocení	
imit.	poměr	čas	poměr	čas	poměr	čas	poměr	čas
1	0.37 (0.01)	201.7 (222.05)	0.84 (0.02)	560 (395.2)	0.22 (0.25)	8.57 (2.64)	0.998 (0.003)	46.2 (9.9)
2	0.68 (0.01)	39.77 (16.4)	0.668 (0.01)	918.8 (377.5)	0.94 (0.01)	18.83 (6.09)	0.94 (0.01)	48.6 (31.5)
3	0.38 (0.01)	97.1 (97.6)	0.76 (0.01)	216 (196.4)	0.25 (0.01)	18.03 (9.69)	0.71 (0.01)	75.2 (69.3)
4	0.52 (0.2)	41.57 (14.2)	0.51 (0.03)	854.13 (382.82)	0.26 (0.01)	5.27 (4.25)	0.37 (0.02)	912 (317.1)
5	0.5 (0.01)	4.97 (0.96)	0.5 (0.01)	21.4 (3.17)	0.51 (0.04)	6.33 (0.88)	0.5 (0.03)	18.9 (4.39)
6	0.54 (0.003)	0 (0)	0.29 (0.002)	50.17 (9.59)	0.47 (0.01)	1.2 (1.81)	0.42 (0.01)	33.63 (9.73)
7	0.5 (0)	0 (0)	0.5 (0.003)	7.2 (9.85)	0.5 (0)	0 (0)	0.5 (0.002)	5.67 (9.88)
8	0.48 (0.003)	0 (0)	0.44 (0.003)	26.2 (3)	0.69 (0.01)	2.73 (0.58)	0.69 (0.01)	30.53 (6.96)

Každý člen tabulky je výsledkem třiceti samostatných simulací. Průměrné hodnoty jsou doplněny středními odchylkami v závorkách. *Zdroj: autor*

V tabulce 3 jsou uvedeny výsledky šestnácti sérií simulací. Zaznamenány jsou průměrné hodnoty kooperačních poměrů a potřebná kola k jejich dosažení. V závorkách pod těmito údaji jsou uvedeny střední odchylky. Protože prostřednictvím těchto čísel nelze dostatečně přiblížit chování sítí v simulacích, bude každé imitační schopnosti věnován samostatný prostor. Přesto jsou některé prvky většiny modelovaných situací společné. V časovém vývoji poměru kooperujících a nekooperujících

agentů (resp. kooperačnímu poměru) se jedná zejména o charakteristický propad této hodnoty ihned po začátku simulace. Ve většině případů jde o jev popsáný již Axelrodem [4] v jeho „příběhu kooperace“. Na začátku jsou kooperující agenti náhodně rozptýleni mezi ostatní, nekooperující, jedince. Přestože se jejich počet v prvních kolech simulace snižuje, formují se zbytky kooperační strategie do skupinek a shluků agentů, ve kterých se již vyplatí kooperovat. Připomeňme, že je kooperace relativně výhodná pouze tam, kde se potkávají agenti se stejnými strategiemi, tedy kooperující s kooperujícími a nekooperující s nekooperujícími. Dalším častým znakem je absence výrazného lokálního maxima. Přestože poměr neustále kolísá kolem nějaké dlouhodobější tendence (ať už klesající, stoupající nebo konstantní) lze jen stěží zaznamenat výrazný dlouhodobý vzestup a následný pokles. Poměr má tedy po počátečním propadu z dlouhodobého hlediska obvykle pouze monotónní vývoj s jde vesměs o jakési „nalezení“ rovnovážného stavu. Proto se toto týká pouze imitací, které v nekonečnu zřetelného stabilního stavu dosahují. Zde je třeba zdůraznit, že pro různé imitace a sítě měl stabilní stav různý charakter. Například v modelech se synchronním rozhodováním měl často podobu periodického opakování několika posledních hodnot. Naproti tomu modely s asynchronním rozhodováním agentů projevovaly proměnné kolísání kolem stálé průměrné hodnoty. Toto kolísání mělo někdy povahu krátkodobých cyklů v řádech desítek hracích kol, jindy naopak dlouhodobých cyklů v řádech stovek kol.

Obrázek 4: Závislost na podobě výplatní matice



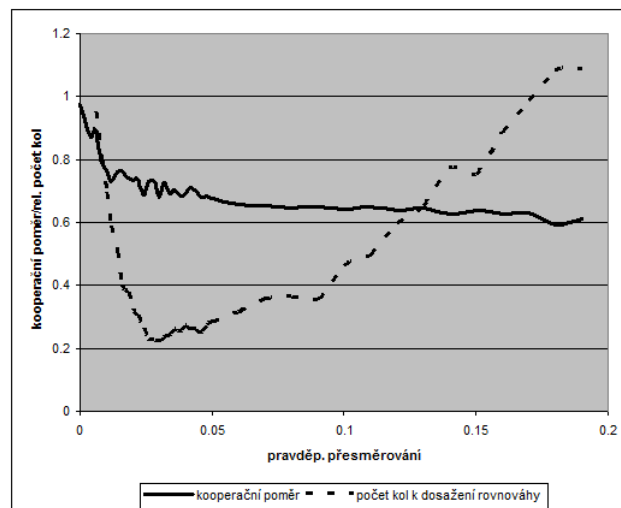
zdroj: Santos [18]

V tomto modelu byla využita hra *vězňovo dilema* s pevnou výplatní maticí. Podoba výplatní matice má však zásadní vliv na výsledky simulací. V některých pub-

likovaných studiích¹⁷ byla pozornost věnována právě závislostem hodnot v rovnovážném stavu na parametru T (*temptation to defect*), který (za předpokladu zachování zbylých tří členů matice konstantních) je nejdůležitějším členem – takzvanou „odměnou za zradu“ – a parametrizuje tak celou výplatní matici. Pro small-world sítě jsou závislosti znázorněny na obr. 4.

5. Small-world (Watts-Strogatz) sítě

Obrázek 5: Závislost kooperačního poměru a rychlosti jeho dosažení na parametru p



Parametr p v tvorbě sítě podle modelu Watts-Strogatz do značné míry determinuje výsledný poměr kooperujících agentů v celé populaci 2500 agentů a rychlost s jakou je tento výsledek dosažen evolučním procesem. Počet kol k dosažení rovnováhy je pro lepší grafické znázornění normován počáteční hodnotou (148). *Zdroj: autor*

Tyto sítě jsou odvozené od topologie kruhu a proto se i evoluce kooperace vyvíjí velmi podobně¹⁸. „Zkratky“ vzniklé přesměrováním náhodně vybraných vazeb však mají za následek částečné zrychlení procesu nalézání rovnovážného stavu za cenu nižšího výsledného kooperačního poměru. Závislost parametru pravděpodobnosti přesměrování a dosaženého rovnovážného stavu znázorňuje graf na obr. 5.

Výhodou Watts-Strogatz modelu small-world sítě je vysoký koeficient shlukování, jehož vysoké hodnoty byly empiricky ověřeny u mnoha sociálních sítí. Lze navrhnout, že tato vlastnost sehraje roli i v evoluci kooperace, která je podobným shlukováním

¹⁷Viz Santos [19]

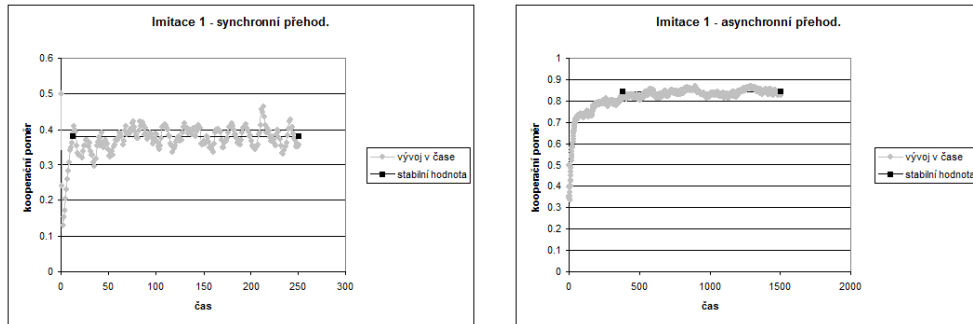
¹⁸Stabilní hodnota poměru se u kruhu blíží 100%, ovšem k jejímu dosažení je třeba velký počet kroků. Více o topologii kruhu viz např. Gilbert [31]

podporována. V porovnání se scale-free sítěmi představovanými modelem Barabási-Albert, které vykazují koeficient shlukování relativně velmi nízký, je však zastoupení kooperativní strategie nižší ve většině případech imitačního chování. Také Santos [23] upozorňuje na to, že koeficient shlukování nemá žádnou souvislost se shlukováním kooperujících agentů. Jako příklad uvádí výsledky simulací na sítích pravidelných topologií (jako je kompletní síť nebo mřížka), které mají vysoké koeficienty shlukování a přesto je kooperace rychle vytlačena nekooperativním jednáním.

Velký rozdíl lze sledovat mezi oběma druhy přehodnocování strategií. V případě synchronního přehodnocování, kdy se agenti rozhodují o budoucí strategii po každém kole všichni současně, mají sítě v rovnovážném stavu tendence periodicky oscilovat kolem setrvalých hodnot. Lze to vysvětlit vysokým koeficientem shlukování a tím, že alespoň část agentů imituje ty své sousedy, kteří sami přehodnocují a mění strategii pro budoucí kolo. V tomto kole se v této skupině významně změní poměr zisků blahobytu a dochází opět ke zpětnému přehodnocení u části agentů. Stejný proces se neustále opakuje a kooperativní (resp. nekooperativní) strategie bezcílně „cestuje“ ve smyčce. V extrémním případě pak agenti imitují svoje vlastní chování z před-předchozího kola neboť imitují agenty, kteří v předchozím kole imitovali tyto agenty samotné. Asynchronní rozhodování naproti tomu dává shluku agentů prostor přehodnotit strategie plynule.

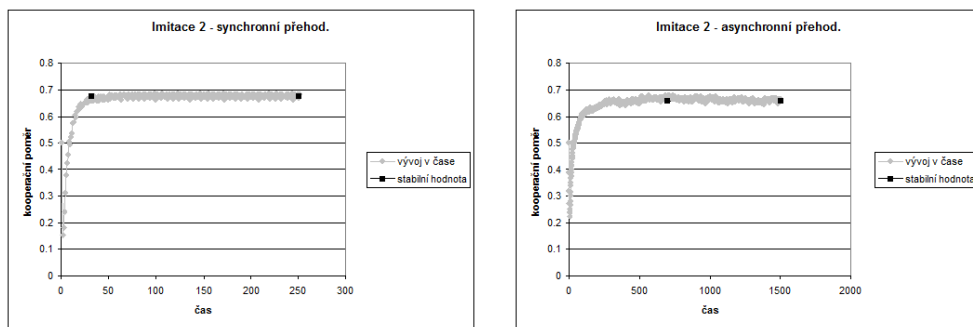
Následují grafy představující typickou ukázkou simulace od každého druhu imitace a to v obou variantách – synchronního (nahore) i asynchronního (dole) přehodnocování. Jelikož nejde o průměrné výsledky z více simulací, mohou se hodnoty pozorovatelné v grafech od těch tabulkových lišit.

Obrázek 6: Imitace hráče s nejvyšším ziskem - synchronní a asynchronní přehodnocování



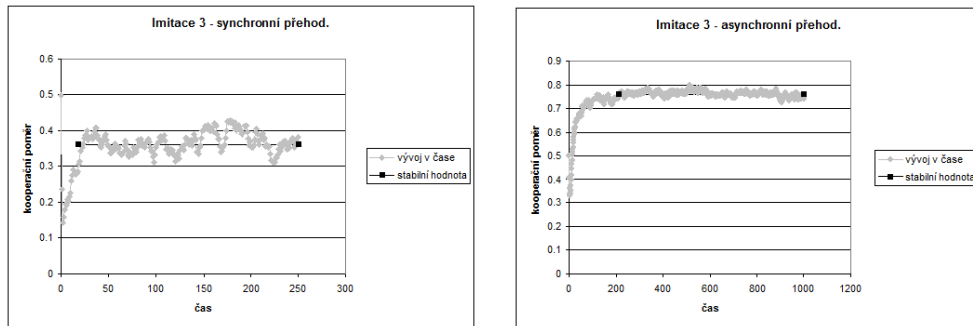
V tomto prvním případě agenti imitovali sousedy s nejvyšším celkovým ziskem. Nízká míra stability a velký rozdíl mezi synchronním a asynchronním přehodnocováním strategií je způsoben tím, že si hráči neváží vlastních zisků a „slepě“ kopírují chování okolí. Tato imitace však poskytuje mnohem vyrovnanější výsledky v modelu bez tzv. self-play, tedy v modelu, kde agenti nehrají jednu hru VD sami se sebou. Jedná se o velmi jednoduché chování na nízkém stupni racionality. Přesto (nebo právě proto) v případě asynchronního přehodnocování vede k vysokému podílu kooperujících agentů.

Obrázek 7: Imitace hráče s nejlepším ziskem, pokud je vyšší než vlastní zisk



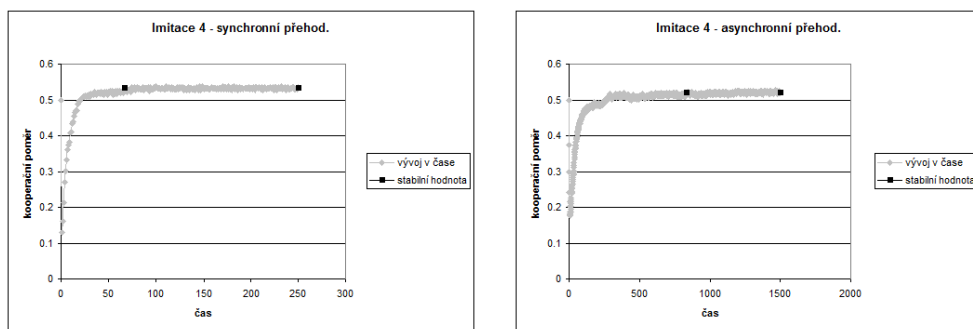
V druhém agenti porovnávali s blahobytem nejúspěšnějšího souseda i svůj vlastní zisk. Výsledkem je mírný pokles v počtu kooperátorů ale i vyšší stabilita výsledného poměru. Toto je imitační chování, které nalezneme ve většině současné literatury zabývající se teoriemi her na sociálních sítích. Mírné odlišnosti (např. od modelu Allena Wilhita [31]) mohou být způsobeny variabilitou vstupních parametrů při generování W-S sítě. Vliv těchto parametrů znázorňují obr. 4 a obr. 5. Svoji roli hraje též konektivita. Kooperují především agenti na uzlech vysokého řádu.

Obrázek 8: Imitace agenta s nejlepším průměrným ziskem



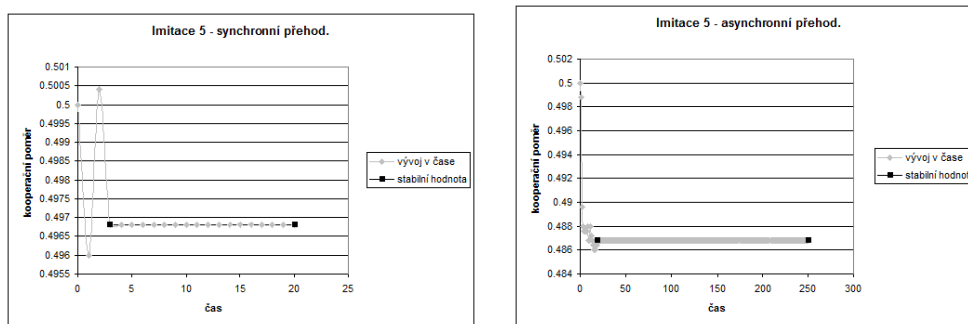
Důležitým poznatkem je i to, že imitací reflektující zprůměrované celkové zisky nemají agenti tendenci méně kooperovat. Je to způsobeno především zahrnutím self-play hry do každého simulovaného kola. Tím si zejména agenti na uzlech nízkého řádu udržují relativně vysoké průměrné zisky.

Obrázek 9: Imitace agenta s nejlepším průměrným ziskem, pokud přesahuje vlastní prům. zisk



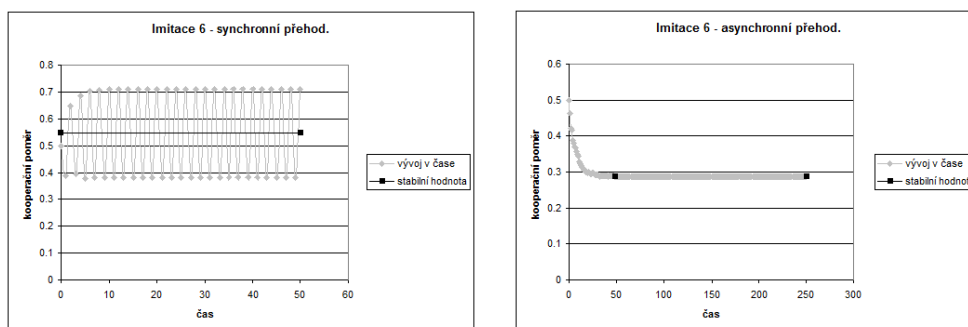
Podobně jako v případě Imitace 1 a Imitace 2, i zde mělo oproti Imitaci 3 zahrnutí vlastních zisků do rozhodovacího procesu agenta za následek pokles míry kooperace mezi agenty a zvýšení stability stejné veličiny. Kooperují především agenti vyšších řádů konektivity.

Obrázek 10: Následování většiny



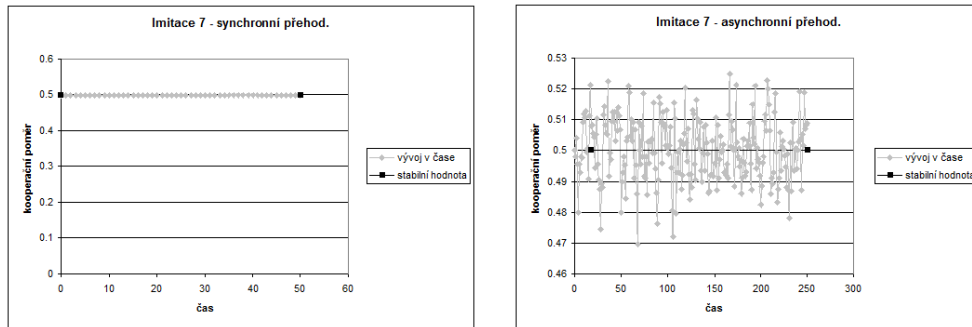
Následování většiny, tedy zaujmutí strategie, která je v okolí agentů (včetně jich samých) převahující, je jediný způsob imitace, který nezohledňuje zisky agentů a podle očekávání vede toto chování k velmi stabilní hodnotě poměru rozdělujícím agenty podle jejich strategií přibližně na dvě stejné poloviny. Poměr kooperace a nekooperace není diversifikován v distribuci konektivity. Výsledný stav je však silně ovlivněn počátečními podmínkami. Pro jiné počáteční rozdělení strategií má tento model tendence divergovat ke krajním hodnotám intervalu (0; 1).

Obrázek 11: Imitace strategie s nejvyšším minimálním ziskem



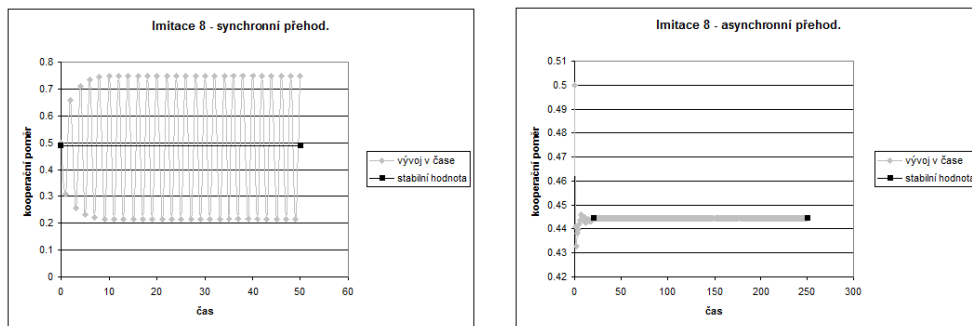
Imitaci agenta úspěšnějšího z nejneúspěšnějších od obou strategií lze interpretovat jako jednání z averze k riziku nízkého zisku. Rozhoduje zde povaha výplatní matice a to vesměs v hodnotách výplat pro hru s nekooperujícími agenty. Relativně vysoká homogenita konektivity ve small-world sítích brání u asynchronního přehodnocování vytvoření podstatných rozdílů v zisku interagujících agentů. Velký rozdíl mezi synchronním a asynchronním rozhodováním lze sledovat i v distribuci kooperace podle řádu. V prvním případě má kooperační poměr tendenci stoupat s řádem. V druhém případě je tomu naopak.

Obrázek 12: **Imitace strategie s nejvyšším minimálním ziskem se započítáním vlastních výsledků**



I tato imitace, která zohledňuje vlastních dosažených výsledků, má za následek relativně stabilní stavy populace. Pozornost si však zaslouží verze se synchronním přehodnocováním strategií. Z grafu vyplývá, že se kooperační poměr ustálil v průměru na konstantní hodnotě 50%. Vývoje celkového blahobytu však periodicky kmitá, což znamená, že mezi agenty nadále pokračují změny strategií i když stále ve stejném poměru kooperace / nekooperace.

Obrázek 13: **Strategie s nejvyšším budoucím ziskem odhadnutá na základě interakcí v posledním kole**



Jak již bylo řečeno v teoretické části, nejedná se v tomto případě o imitaci. Zahrnutí tohoto chování do modelu mělo za cíl porovnat primitivní pravidla imitačního jednání s více sofistikovaným rozhodováním. Podle očekávání nevede toto chování populaci agentů jako celek ke kooperaci, tedy ani k vysokému blahobytu. Ke zlepšení tohoto stavu by pravděpodobně přispělo rozšíření paměti minulých hracích kol agenta nebo kombinace tohoto rozhodování a některého typu imitace. Kooperace převažuje u agentů nižšího řádu.

5.1. Scale-free síť (Barabási-Albert model)

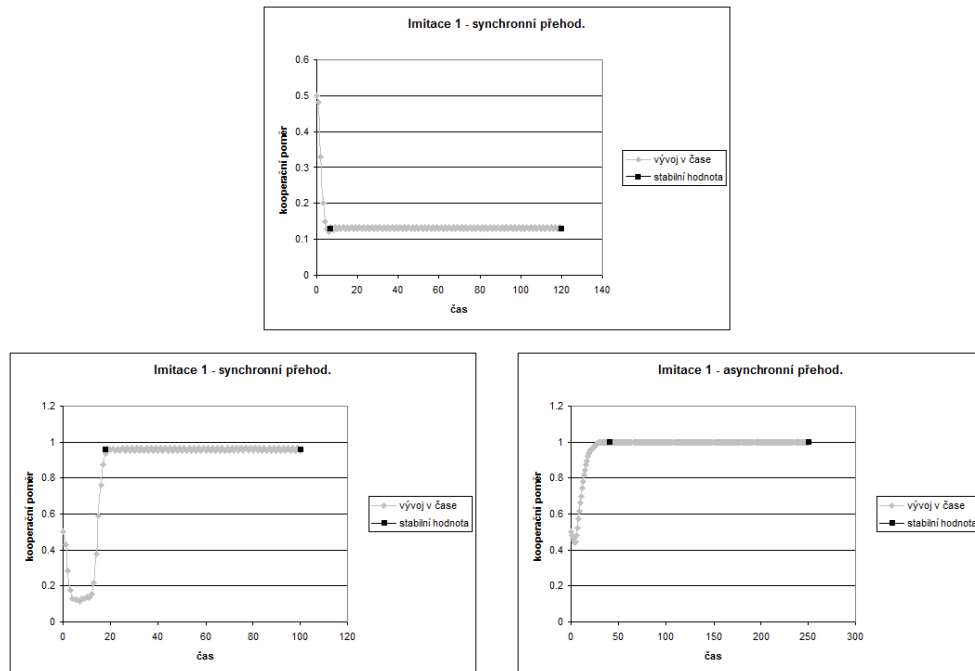
Jak již bylo řečeno v teoretické části, small-world síť jsou co do konektivity svých uzlů relativně velmi homogenní. V těchto sítích je pro nekooperativní strategii relativně snazší udržet alespoň část svých výchozích pozic, neboť rozdíly v blahobytu

agentů jsou při nízké aktivitě (nižším počtu interakcí) relativně malé. Naproti tomu v sítích konektivitou následujících mocninné zákony jsou značné rozdíly v aktivitě nejmenších a naopak nejpropojenějších uzlů zásadní pro rozvoj kooperativní strategie. Tato heterogenita umožňuje spolu se skutečností, že většina nejpropojenějších uzlů je navíc propojena mezi sebou navzájem, kooperativní strategii získané pozice uzlů nejvyšších řádů bezpečně obhájit. Po úvodním celkovém propadu kooperačního poměru se agenti s nejvyšším počtem vazeb rychle stávají kooperujícími. V momentě, kdy zhruba třetina uzlů s nejvyšší konektivitou zaujme pozici kooperátora, se celá síť ve velmi krátkém čase stabilizuje ve stavu, kdy většina populace kooperuje.

Pro imitace spočívajících v kalkulacích s hodnotami průměrných příjmů ztrácejí scale-free síť výhodu heterogenity řádů a málo aktivní uzly již nejsou pod jejich silným vlivem, jako tomu je u prvních dvou typů imitací. V tomto případě dosahují tyto sítě srovnatelných i nižších poměrů v porovnání se sítěmi small-world. Podobná situace je i v případě imitací na bázi minimálních příjmů.

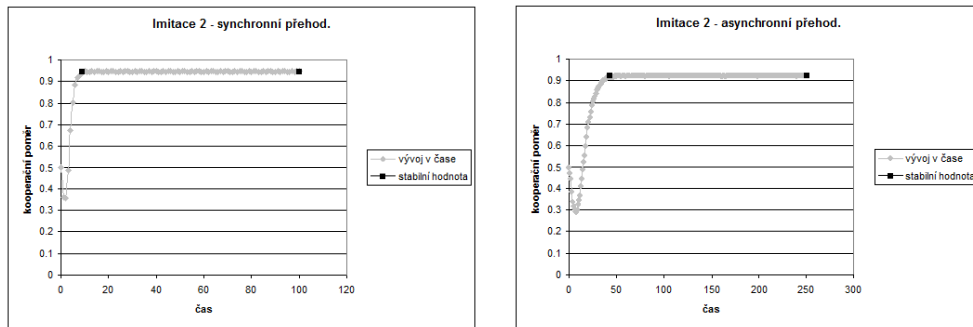
Následuje opět přehled všech variant imitací s ukázkou typického průběhu simulace. Komentovány jsou pouze v případě kvalitativních odlišností od výsledků small-world sítí prezentovaných v předchozí sekci.

Obrázek 14: **Imitace hráče s nejvyšším ziskem**

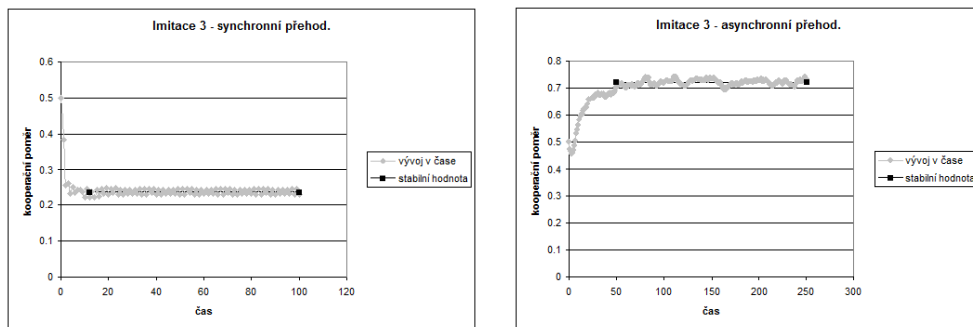


Synchronní způsob rozhodování přinesl u této imitace dva stabilní výsledky. Přibližně 14% simulací skončilo výsledným poměrem 0.96 a zbylých 86% poměrem 0.13. V druhém případě se v síti nenašel dostatečně silný shluk kooperujících agentů. Pomalejší průběh asynchronního rozhodování tyto shluky umožnil vytvořit.

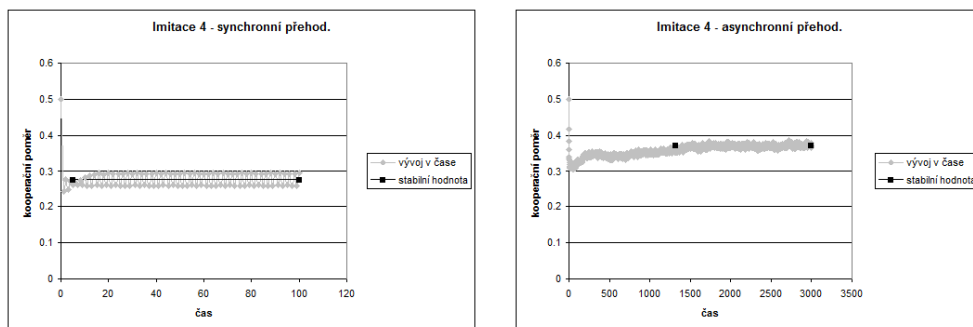
Obrázek 15: Imitace hráče s nejlepším ziskem, pokud je vyšší než vlastní zisk



Obrázek 16: Imitace agenta s nejlepším průměrným ziskem

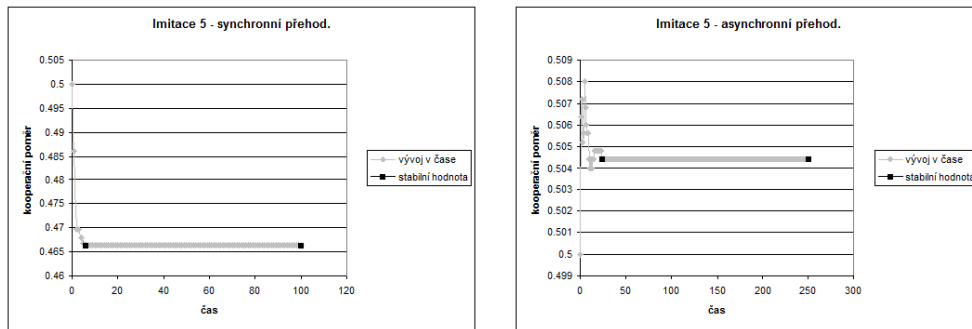


Obrázek 17: Imitace agenta s nejlepším průměrným ziskem, pokud přesehne vlastní prům. zisk



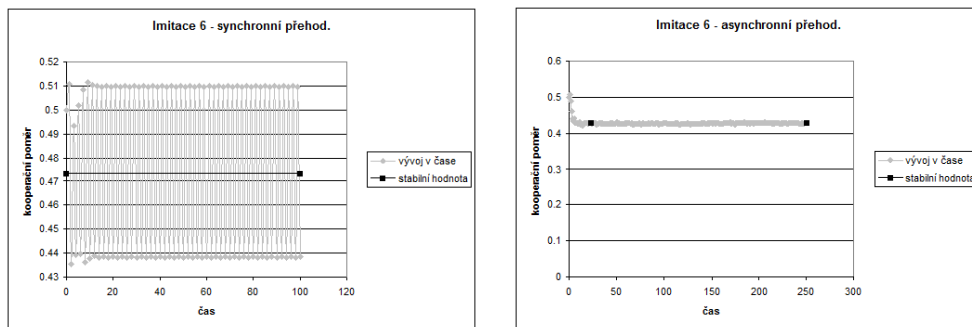
Imitace 4 je jediná simulovaná imitace, v jejíž případě dosahovala scale-free sítí průměrně nižšího poměru kooperujících agentů. Jednou z pravděpodobných příčin tohoto jevu je malá přizpůsobivost uzlů nízkého řádu. Agenti vysoké konektivity ztrácejí vliv, neboť se zisk nyní počítá na pouze jako průměrný. Potom tyto centra slouží pouze jako katalyzátory celého procesu adaptace.

Obrázek 18: Následování většiny

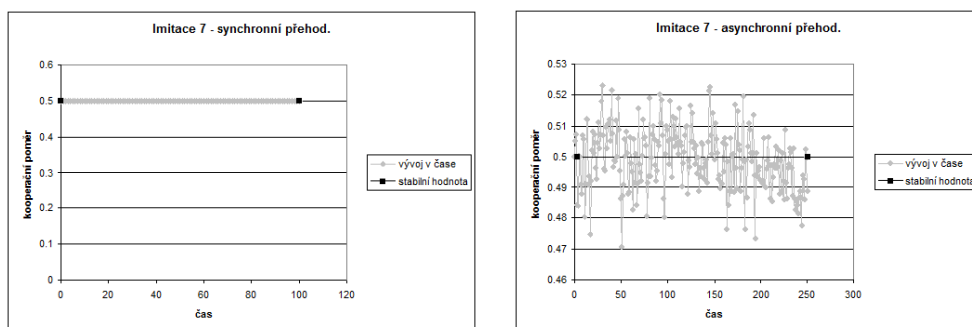


Jde o jediný případ, kdy vývoj celkového blahobytu nenásleduje vývoj kooperačního poměru. Kooperační poměr se náhodně ustálil blízko nad nebo blízko pod počátečním stavem 50%. Vývoj celkového blahobytu však vždy pouze klesl pod svůj výchozí stav. Tento jev nastává při nerovnoměrném rozdělení kooperujících agentů napříč konektivitou. Pokud neaktivnější agenti nekooperují, potom je celkový blahobyt populace nízký i přesto, že velká část agentů (kteří mají konektivitu nižší a neinteragují s předchozí skupinou) navzájem kooperuje. Částečným dokladem je v tomto potom graf rozdělení kooperačního poměru podle konektivity.

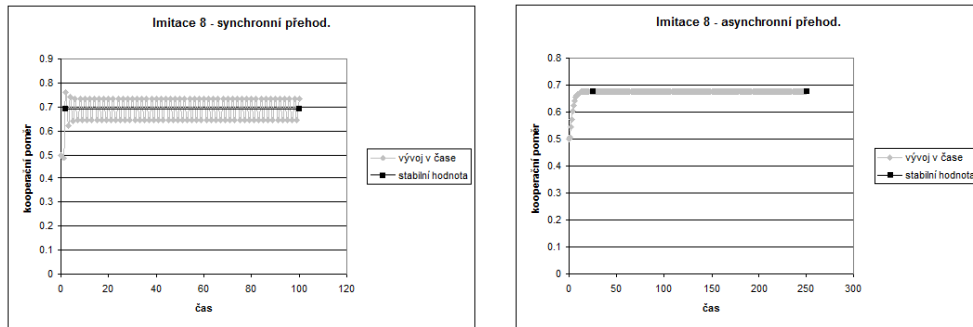
Obrázek 19: Imitace strategie s nejvyšším minimálním ziskem



Obrázek 20: Imitace strategie s nejvyšším minimálním ziskem se započítáním vlastních výsledků



Obrázek 21: Strategie s nejvyšším budoucím ziskem odhadnutá na základě interakcí v posledním kole



Za pozoruhodný považujeme výsledek těchto simulací. Ukazují, že i chování založené na přímočaré vypočítavosti vede v sítích s mocninným rozdělením konektivity k vysokému zastoupení kooperace. Tento model se navíc ukázal jako velmi odolný proti počátečním podmínkám.

6. Závěr

V souladu s dosavadními výsledky v oblasti multiagentních systémů jsme se ani my nesnažili vytvořit model za účelem přesné predikce nebo maximálně věrohodné a realistické simulace. Naším cílem bylo doplnit a rozšířit současné poznatky o teorii her, komplexních systémech a sociálních sítích. Důraz byl kladen jak na kontinuitu s již publikovanými pracemi tak i na přesné používání a následnou prezentaci použité metodologie. Především poslední zmiňovaný prvek jsme v některých dostupných zdrojích postrádali.

V této dosavadní literatuře byly způsoby imitace agentů vesměs zúženy na jediný – na imitaci agenta s maximálním ziskem. Naše práce však ukazuje, že je kooperace mezi agenty možná i za jiných podmínek. Další typy imitací a strategického chování se ukázaly jako kooperaci nakloněné. V některých případech potom sehrála důležitou roli použitá topologie sítě, ve které byli agenti propojeni. Především topologie scale-free sítě se projevila jako velmi efektivní, robustní a adaptabilní. Celkově však naše výsledky naznačují, že vývoj strategií je spíše determinován souběžným efektem topologie interakcí a dalších evolučních mechanismů než topologií samotnou.

Reference

- [1] ALBERT R., BARABÁSI A. -L. Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, 1999, vol. 286 no. 5439, pp. 509–512
- [2] ALBERT R., BARABÁSI A. -L. Statistical Mechanics of Complex Networks. *Reviews of Modern Physics*, 2002, Vol 74, str. 47–97

- [3] AMARAL L. A. N., SCALA A., BARTHÉLÉMY M., STANLEY H.E. Classes of behavior of small-world networks. *Proc Natl Acad Sci USA* 2000, 97, 11149-11152
- [4] AXELROD R. (1984) *The Evolution of Co-operation*. New York: Penguin Books Ltd, 1990. ISBN 0-14-012495
- [5] AXELROD R. Advancing the Art of Simulation in the Social Sciences. *Japanese Journal for Management Information System*, 2003, Vol. 12, No. 3
- [6] BARABÁSI A.-L. (2005) *V pavučině sítí*. Praha, Litomyšl: Paseka, 2005. z orig. *Linked* (Cambridge: Perseus Publishing, 2002) přeložil RNDr. František Slanina. ISBN 80-7185-751-3
- [7] DOROGOVTSEV S. N., MENDES J.F.F. Evolution of networks. *Advances in Physics*, 2002, vol. 51
- [8] GILBERT N., TROITZSCH K. G *Simulation for the Social Scientist*. Berkshire (England): Open University Press, McGraw-Hill Education, 2005. ISBN 0-335-21601-3
- [9] GREGOR, M. Nová politická ekonomie. Praha: Karolinum, 2005. ISBN 80-246-1066-3
- [10] HOLME P., TRUSINA A., KIM B. J., MINNHAGEN P. Prisoner's dilemma in real-world acquaintance networks: Spikes and quasi-equilibria induced by the interplay between structure and dynamics. *Phys. Rev.*, 2003 E 68
- [11] Horton I. *JAVA 5*. z angl. *Beginning Java 5* (Birmingham: Wrox Press Ltd, 2002, ISBN 1-861005-69-5) Praha: Neocortex, spol. s.r.o., 2005, ISBN 80-86330-12-5
- [12] JACKSON M. O., WOLINSKY A. A strategic model of social and economic networks. *Journal of Economic Theory*, 1996. 71:44–74
- [13] KUBÍK A. (2004) *Inteligentní agenty*. Brno: Computer Press, 2004. ISBN 80-251-0323-4
- [14] NEUMAN von, J. and MORGENSTERN O. (1944) *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press.
- [15] NOWAK M. A., MAY R. M. (1992) *Evolutionary games and spatial chaos*. *Nature*. 359: 826-829.

- [16] NOWAK M. A., MAY R. M.. (1993) *The Spatial Dilemmas of Evolution*. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 3, No. 1, 35-78
- [17] SANDHOLM T. W., CRITES R. H. Multiagent reinforcement learning in the Iterated Prisoner's Dilemma. *BioSystems*, 1996. vol. 37 str. 147-166
- [18] SANTOS F. C., PACHECO J. M. A new route to the evolution of cooperation. *Journal of Evolutionary Biology*, 2006. Volume 19, Number 3, pp. 726-733
- [19] SANTOS F. C. Games on Graphs, *Technical Report No. 2006-024*, IRIDIA - Technical Report Series. ISSN 1781-3794
- [20] SANTOS F. C., RODRIGUES J. F., PACHECO J. M. Graph topology plays a determinant role in the evolution of cooperation. *Proceedings of the Royal Society*, 2006. Proc. R. Soc. B doi:10.1098/rspb.2005.3272 Published online
- [21] SANTOS F. C., PACHECO J. M., LENAERTS T. Evolutionary dynamics of social dilemmas in structured heterogeneous populations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, online, 2006. doi:10.1073/pnas.0508201103
- [22] SANTOS F.C., PACHECO J.M., LENAERTS T. Cooperation prevails when individuals adjust their social ties. *PLoS Comput Biol* 2, 2006, (10): e140. DOI: 10.1371/journal.pcbi. 0020140
- [23] SANTOS F. C., PACHECO J. M. Scale-Free Networks Provide a Unifying Framework for the Emergence of Cooperation. *Phys. Rev Lett*, 2005. 95, 098104
- [24] SMITH M. J. (1982) *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press
- [25] TEFATSION L. Agent-Based Computational Economics. *Economics Working Paper*, 2002, no. 1, Iowa State University
- [26] TEFATSION L. Economic Agents and Markets as Emergent Phenomena. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2002, Vol. 99, No. 10
- [27] TEFATSION L., JUDD K. L. *Handbook of Computational Economics, Vol. 2: Agent-Based Computational Economics*. Elsevier/North Holland, 2006. ISBN-13: 978-0-444-51253-6 ISBN-10: 0-444-51253-5
- [28] VICSEK T. The Bigger Picture. *Nature*, 2002, vol. 418

- [29] VUKOV J., SZABÓ G. Evolutionary prisoner's dilemma game on hierarchical lattices, *Phys. Rev.*, 2005, E 71, 036133
- [30] WATTS D. J., STROGATZ S. H. Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, 1998, v. 393, p. 440–442
- [31] WILHITE A. Economic activity on fixed networks. In *Handbook of Computational Economics, Vol. 2: Agent-Based Computational Economics*. Elsevier/North Holland, 2006, ISBN-13: 978-0-444-51253-6 ISBN-10: 0-444-51253-5
- [32] Wikipedia : the free encyclopedia [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2008-20-02]. Anglické rozhraní. 2 041 144 článků. Dostupný z WWW: <http://www.wikipedia.org/>

IES Working Paper Series

2008

1. Irena Jindrichovska, Pavel Körner : *Determinants of corporate financing decisions: a survey evidence from Czech firms*
2. Petr Jakubík, Jaroslav Heřmánek : *Stress testing of the Czech banking sector*
3. Adam Geršl : *Performance and financing of the corporate sector: the role of foreign direct investment*
4. Jiří Witzany : *Valuation of Convexity Related Derivatives*
5. Tomáš Richter : *Použití (mikro)ekonomické metodologie při tvorbě a interpretaci soukromého práva*
6. František Turnovec : *Duality of Power in the European Parliament*
7. Natalie Svarciva, Petr Svarc : *Technology adoption and herding behavior in complex social networks*
8. Tomáš Havránek, Zuzana Iršová : *Intra-Industry Spillovers from Inward FDI: A Meta-Regression Analysis*
9. Libor Dušek, Juraj Kopecsni : *Policy Risk in Action: Pension Reforms and Social Security Wealth in Hungary, Czech Republic, and Slovakia*
10. Alexandr Kuchynka : *Volatility extraction using the Kalman filter*
11. Petr Kadeřábek, Aleš Slabý, Josef Vodička : *Stress Testing of Probability of Default of Individuals*
12. Karel Janda : *Which Government Interventions Are Good in Alleviating Credit Market Failures?*
13. Pavel Štika : *Možnosti analytického uchopení reciprocity v sociálních interakcích*
14. Michal Bauer, Julie Chytilová: *A Model of Human Capital, Time Discounting and Economic Growth*
15. Milan Rippel, Petr Teplý : *Operational Risk – Scenario Analysis*
16. Martin Gregor : *The Strategic Euro Laggards*
17. Radovan Chalupka, Petr Teplý : *Operational Risk Management and Implications for Bank's Economic Capital – a Case Study*
18. Vít Bubák : *Value-at-Risk on Central and Eastern European Stock Markets: An Empirical Investigation Using GARCH Models*
19. Petr Jakubík, Petr Teplý : *The Prediction of Corporate Bankruptcy and Czech Economy's Financial Stability through Logit Analysis*

20. Elisa Gaelotti : *Do domestic firms benefit from geographic proximity with FDI? Evidence from the privatization of the Czech glass industry*
21. Roman Horváth, Marek Rusnák : *How Important Are Foreign Shocks in Small Open Economy? The Case of Slovakia*
22. Ondřej Schneider : *Voting in the European Union - Central Europe's lost voice*
23. Fabricio Coricelli, Roman Horváth : *Price Setting and Market Structure: An Empirical Analysis of Micro Data*
24. Roman Horváth, Kamila Koprnická : *Inflation Differentials in EU New Member States: An Empirical Evidence*
25. Michal Franta, Branislav Saxa, Kateřina Šmídková : *Inflation Persistence: Is It Similar in the New EU Member States and the Euro Area Members?*
26. Jakub Seidler : *Implied Market Loss Given Default: structural-model approach*
27. Radovan Chalupka, Juraj Kopecsni : *Modelling Bank Loan LGD of Corporate and SME Segments: A Case Study*
28. Michal Bauer, Julie Chytilová, Jonathan Morduch: *Behavioral Foundations of Microcredit: Experimental and Survey Evidence From Rural India*
29. Jiří Hlaváček, Michal Hlaváček : *Mikroekonomické modely trhu s externalitami, zobecněný Coaseho teorém*
30. Václav Hausenblas, Petr Švarc : *Evoluční dynamika vězňova dilematu: Vliv topologie interakcí a imitace na vývoj kooperativního chování*

All papers can be downloaded at: <http://ies.fsv.cuni.cz>

